

III кръг, 6 юни 2021 г.

Ученици от 11-12 клас – решения

1 задача. Комета и метеори. Нека си представим, че една комета има орбита, лежаща точно в равнината на еклиптиката, с голяма полуос 25 AU и ексцентрицитет 0.96.

- **А)** Определете максималното и минималното разстояние между кометата и Слънцето;
- **Б)** Намерете максималната и минималната скорост, с която тя се движи по орбитата си;
- **В)** С каква скорост относно Земята биха навлизали в земната атмосфера метеорите, чието родителско тяло е тази комета?
- **Г)** В кое съзвездие ще бъде радиантът на метеорния поток, наблюдаван от Земята и причинен от тази комета, ако датата, на която той проявява максимална активност, е 11 август?

Приемете, че Земята се движи по кръгова орбита.

Решение:

А) Нека да означим голямата полуос на кометната орбита с a , а нейния ексцентрицитет с e .

Оттук следва, че афелийното (максималното) и перихелийното (минималното) разстояние между нея и Слънцето са съответно:

$$r_A = a(1 + e) = 49 \text{ au}$$

$$r_{\Pi} = a(1 - e) = 1 \text{ au}$$

Б) За да намерим скоростите, с които кометата преминава през перихелий и афелий, можем да използваме законите за запазване на енергията и момента на импулса.

Записваме законите за запазване на енергията (1) и момента на импулса (2) за разстоянията r_A и r_{Π} на кометата до Слънцето в афелий и перихелий:

(1):

$$\frac{mV_A^2}{2} - \frac{GMm}{r_A} = \frac{mV_{\Pi}^2}{2} - \frac{GMm}{r_{\Pi}}$$

(2):

$$mV_A r_A = mV_{\Pi} r_{\Pi}$$

Тук с M е означена масата на Слънцето, с m - масата на кометата, а с G - гравитационната константа.

След преработване на изразите получаваме:

$$V_{\Pi} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \approx 41.7 \text{ km/s}$$

$$V_A = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \approx 0.85 \text{ km/s}$$

В) Забелязваме, че кометата има перихелийно разстояние, което точно съвпада с радиуса на земната орбита. Преминавайки през перихелий, кометата има скорост перпендикулярна на радиус-вектора, който я свързва със Слънцето. От друга страна, Земята се движи по кръгова орбита. Това означава, че частичките, отделени от кометата, като навлизат в земната атмосфера имат скорости относно Слънцето, равни на перихелийната скорост на кометата и успоредни по направление със скоростта на Земята V_3 .

Можем да намерим:

$$V_3 = \sqrt{\frac{GM}{1 \text{ au}}} \approx 29.8 \text{ km/s}$$

В това подусловие, обаче, изникват два случая, защото е възможно кометата да се движи в същата посока, в която Земята се движи по своята орбита, но също така и в обратната посока.

Обобщено можем да запишем, че скоростта относно Земята, която отделените от кометата метеорни частици биха имали, ако не отчитаме земната гравитация, е следната:

$$u = V_A \pm V_3.$$

Знакът „+“ е за случая, в който кометата се движи в обратна на Земята посока, а знакът „-“ съответства на движението в противоположна посока.

За да намерим скоростта V , с която частиците навлизат в атмосферата на Земята, трябва да отчетем и влиянието на земната гравитация. Метеорните частици предизвикват светене в земната атмосфера (явлението метеор) на височина около 100 km над земната повърхност, която е много по-малка от радиуса на Земята и поради това няма да я отчитаме. От закона за запазване на енергията следва, че:

$$\frac{\mu u^2}{2} = \frac{\mu V^2}{2} - \frac{GM_3 \mu}{R_3}$$

където M_3 и R_3 са масата и радиусът на Земята, а μ е маса на навлизаща частичка.

Получаваме:

$$V = \sqrt{u^2 + \frac{2GM_3}{R_3}} \approx 72.3 \frac{\text{km}}{\text{s}}; 16.3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

По-големата от двете стойности се получава, когато кометата се движи „срещу“ Земята.

Г) И в двата случая, за земния наблюдател би изглеждало, че частичките от кометата идват от направление, което отстои на 90° спрямо Слънцето по еклиптиката. На 11 август Слънцето е в съзвездието Лъв.

В случая, в който кометата се движи в посока обратна на Земята, за нас радиантът на метеорния поток ще бъде в съзвездие, което е на 90° западно от Лъв, или с други думи, там където Слънцето е било преди около 3 месеца (около 11 май). Това би следвало да е съзвездието Овен.

В другия случай, радиантът ще попада в съзвездие, разположено на 90° източно от Лъв, или в точка от еклиптиката, в която Слънцето ще е приблизително три месеца след 11 август. Следователно, тогава радиантът би бил в съзвездието Везни.

Критерии за оценяване:

А) 2т.

- за правилни изрази за двете разстояния – 1т.
- за правилни числени стойности – 1т.

Б) 4т.

- за правилен подход към намирането на скоростите – 2т.
- за правилни крайни изрази и верни числени стойности – 2т.

(Пълен брой точки би следвало да се присъди, дори в случай, в който ученикът не е написал началните съображения, от които тези скорости се извеждат, а само е написал правилно крайните формули.)

В) 6т.

- за намиране на скоростта на Земята – 1т.
- съобразяване на скоростта на частичките, относно Земята, преди да се отчете земното гравитационно влияние – 1т.
- за прилагане на закона за запазване на енергията – 3т.
- за определяне на скоростите на частичките и верни числени резултати – 1т.

(В случай, че в решението на ученика не е отчетено наличието на втори случай, но другият случай е решен напълно и вярно, да се отнемат 2 точки)

Г) 3т.

- за съобразяване на това, че радиантът ще бъде на 90° от Слънцето – 1т.
 - за правилни разсъждения, относно съзвездията и верен извод кои са те – 2т.
- (В случай, че в решението на ученика не е отчетено наличието на втори случай, но другият случай е решен напълно и вярно, да се отнема 1 точка)

2 задача. Да оцелеем на Меркурий. Планетата Меркурий няма практически никаква атмосфера. Поради това, а и поради факта, че тя е много близо до Слънцето, през деня повърхността ѝ се нагрява до температура над 400°C , а през нощта изстива до около -180°C . Все пак, около терминатора на Меркурий можем да намерим място, където температурата да е приемлива за нас. Нека си представим, че се намираме в мобилна изследователска станция на екватора на Меркурий, която се движи по такъв начин, че винаги да остава точно на терминатора.

- **А)** Вие отговаряте за управлението на станцията. На какво разстояние от Слънцето се намира Меркурий в моментите, когато скоростта на движение на станцията по повърхността на планетата трябва да е равна на нула?

- **Б)** Каква е максималната скорост, с която трябва да се движи станцията?

Меркурий се движи около Слънцето по орбита с голяма полуос 0.39 AU и ексцентрицитет 0.205 . Неговият радиус е $2\,440\text{ km}$, а периодът на околоосното му въртене е 59 d .

Решение:

А) За да е изпълнено описаното условие, то трябва скоростта на терминатора по повърхността на Меркурий да е 0 .

Това може да се случи, когато ъгловата скорост $\omega(r)$, с която планетата се движи по своята орбита, се изравни с ъгловата скорост ω_M , с която Меркурий се върти около оста си.

Можем да изразим ω_M , по следния начин:

$$\omega_M = \frac{2\pi}{T_M} \approx 1,23 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$$

В общия случай, ако разгледаме положение на Меркурий, при което той се намира на разстояние r от Слънцето и има ъглова скорост $\omega(r)$, моментът на импулса на планетата относно Слънцето е:

$$L = m \cdot \omega(r) \cdot r^2$$

(m е масата на Меркурий, която ще се съкрати)

Нека да изразим момента на импулса на Меркурий, относно Слънцето, чрез неговите орбитални характеристики.

Означаваме с a голямата полуос на орбитата му, а с e нейния ексцентрицитет. Нека V_A и V_{Π} да са скоростите на Меркурий в афелий и в перихелий.

От закона за запазване на енергията следва, че:

$$E = \frac{mV_A^2}{2} - \frac{GMm}{r_A} = \frac{mV_{\Pi}^2}{2} - \frac{GMm}{r_{\Pi}}$$

като: $r_A = a(1 + e)$ и $r_{\Pi} = a(1 - e)$.

В моментите на перихелий и афелий, векторът на скоростта е перпендикулярен на радиус-вектора, който свързва планетата и Слънцето. Поради това е удобно да запишем и закона за запазване на момента на импулса за тези две положения:

$$L = mV_A r_A = mV_{\Pi} r_{\Pi}$$

След преработване на горните изрази, получаваме, че:

$$V_{\Pi} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$V_A = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

Оттук намираме, че орбиталният момент на импулса на Меркурий е:

$$L = mV_A r_A = m\sqrt{GMa(1-e^2)}$$

Приравнявайки общия израз за момент на импулса, който написахме по-горе, с получения току-що и замествайки ъгловата скорост с тази на околоосно въртене на Меркурий, получаваме:

$$L = m\omega_M r^2 = m\sqrt{GMa(1-e^2)}$$

Следователно, търсеното разстояние е:

$$r = \sqrt{\frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{\omega_M}}$$

$$r \approx 47.1 \text{ млн km}$$

Б) Нека първо да намерим видимата ъглова скорост, с която Меркурий се движи по своята орбита в моментите на перихелий и афелий (с такава ъглова скорост Слънцето се движи по неговата еклиптика).

Изразите за тези ъглови скорости са:

$$\omega_A = \frac{V_A}{r_A} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \sqrt{\frac{1-e}{(1+e)^3}}$$

$$\omega_{\Pi} = \frac{V_{\Pi}}{r_{\Pi}} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \sqrt{\frac{1+e}{(1-e)^3}}$$

След пресмятане получаваме, че:

$$\omega_A \approx 5,52 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$$

$$\omega_{\Pi} \approx 1,27 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$$

(Тук виждаме, че в перихелий орбиталната ъглова скорост на Меркурий наистина е по-голяма от тази, с която той се върти около оста си).

Скоростта, с която трябва да се движим по екватора на планетата така, че да „настигнем“ Слънцето, се определя от разликата между орбиталната ъглова скорост и ъгловата скорост, с която Меркурий се върти около оста си.

От получените числени стойности, можем да заключим, че тази скорост е максимална, когато Меркурий преминава през афелия на своята орбита. Ако R е радиусът на Меркурий, то изразът за нея е:

$$V_{MAX} = (\omega_M - \omega_A) \cdot R$$

$$V_{MAX} \approx 1,66 \text{ m/s}$$

Критерии за оценяване:

А) 9т.

- за правилни съображения при какво условие терминаторът на Меркурий е неподвижен – 1т.
- за намиране на ъгловата скорост на околоосното въртене на Меркурий – 1т.
- за правилен израз за момента на импулса в общ вид - 1т.
- за правилен подход за изразяване на момента на импулса, чрез орбиталните характеристики и верен резултат (учениците не са длъжни да извеждат всички използвани формули, могат да ги използват и на готово) – 4т .
- за правилен израз а за разстоянието Меркурий-Слънце, при което терминаторът се оказва неподвижен и верен числен резултат – 2т.

Б) 6т.

- за изразяване на ъгловите скорости в афелий и перихелий и верни числени стойности – 2т.
- за съобразяване, че скоростта, с която трябва да се движим, за да „догоним“ терминатора зависи от разликата в ъгловите скорости – 1т.
- правилен израз за максималната скорост, с която трябва да се движим – 2т .
- верен числен резултат – 1т.

(В случай, че в решението на ученика не се съдържа извеждане на скоростите в афелий и перихелий, но на готово са използвани правилните формули, следва да се присъди пълният брой точки.)

3 задача. Ахернар. Звездата Ахернар (екваториални координати в епоха J2000: $\alpha = 01^{\text{h}} 37^{\text{m}} 42.8^{\text{s}}$, $\delta = -57^{\circ} 14' 12''$) е най-ярката в съзвездието Еридан и деветата по яркост на нощното небе (видима визуална звездна величина 0.46^{m}). Ахернар се върти много бързо. Скоростта на точка от нейния екватор е 250 km/s . Поради това звездата е силно сплесната – екваториалният ѝ радиус е 11.4 слънчеви радиуса, а полярният – 7.3 слънчеви радиуса. Масата на Ахернар е 6.7 слънчеви маси, а разстоянието до нея е 43 парсека. Приемаме, че екваторът на Ахернар лежи в равнината на зрителния лъч от нас към звездата.

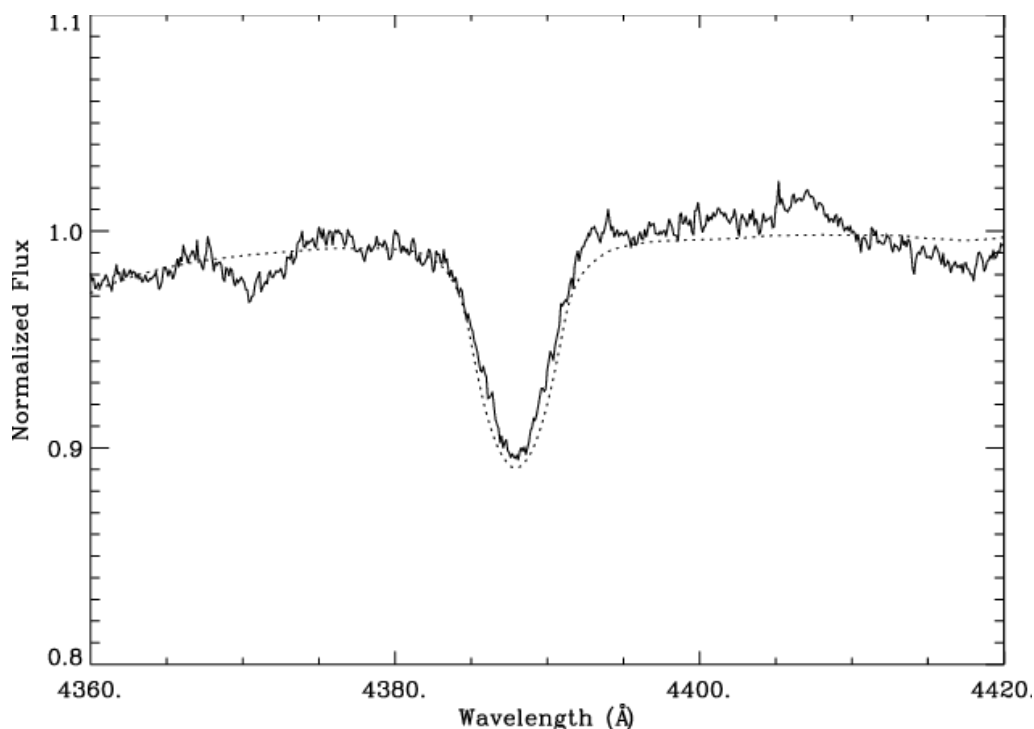
- **А)** Може ли е знаменитият древен учен Клавдий Птолемей да наблюдава Ахернар от Александрия, където е живял през II век? Географската ширина на Александрия е $31^{\circ} 12' \text{ N}$.

- **Б)** Каква е фотосферната температура на Ахернар? Площта на сплеснат сфероид с екваториален радиус a и полярен радиус b е:

$$S = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e} \ln \left(\frac{1+e}{1-e} \right)$$

където e е ексцентрицитетът на елипса с голяма полуос a и малка полуос b . Болометричната поправка за звездната величина на Ахернар е $M_{\text{bol}} - M_{\text{v}} = -1.2^{\text{m}}$.

- **В)** Дадена е част от спектъра на Ахернар около линията на хелия с дължина на вълната 4388 ангстрьома. Измерете ширината на линията от край до край и обяснете получената стойност.

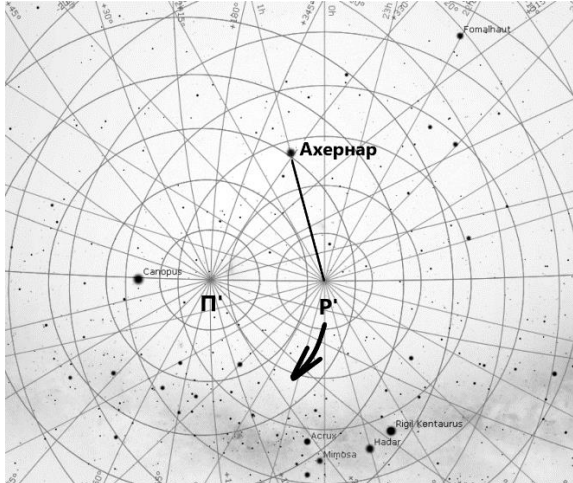


Решение:

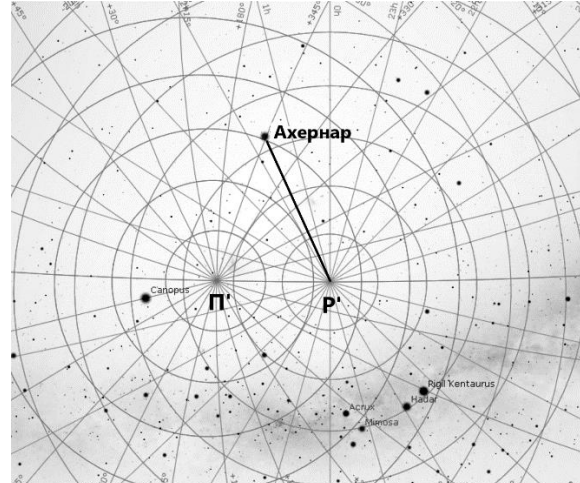
А) При наблюдение от Александрия ($\varphi = +31^{\circ} 12'$) максималната височина на небесния екватор е $90^{\circ} - \varphi = 58^{\circ} 48'$. В горна кулминация обект с деклинация $\delta = -57^{\circ} 14'$ ще бъде на $57^{\circ} 14'$ под най-високата точка от екватора, т.е. височината на този обект над хоризонта ще бъде $h = 58^{\circ} 48' - 57^{\circ} 14' = 1^{\circ} 34'$, без отчитане на атмосферната рефракция.

Въпреки това, Птолемей не е можел да наблюдава Ахернар от Александрия, тъй като координатите на звездата през II век са били различни. Заради прецесията на земната ос северният небесен полюс извършва движение около северния еклиптичен

полюс с период около 26 000 години. Посоката на това движение във всеки един момент е перпендикулярна на направлението към еклиптичния полюс и обратна на посоката, в която нараства ректасцензията, т.е. към точка с екваториално координати $\alpha = 0^h$, $\delta = 0^\circ$. Съответно, южният небесен полюс се движи към точка с координати $\alpha = 12^h$, $\delta = 0^\circ$ и следователно се отдалечава от Ахернар.



Положения на южния еклиптичен полюс P' и южния небесен полюс R' през 1006 г.



Положения на южния еклиптичен полюс P' и южния небесен полюс R' през 2013 г.

За $t = 1900$ години южният небесен полюс е изминал $1900/26000$ част от обиколката си около южния еклиптичен полюс. Неговата траектория представлява паралел с дължина $360^\circ \cos(90^\circ - \epsilon)$. Изминатият ъгъл е приблизително:

$$\theta = \left(\frac{1900}{26000} \right) 360^\circ \cos(90^\circ - \epsilon) = 10.5^\circ$$

Тъй като южният небесен полюс се отдалечава от Ахернар, деклинацията на звездата намалява по абсолютна стойност и лесно може да се оцени, че преди 1900 години нейната абсолютна стойност е била с над 2° по-голяма. Това означава, че звездата е била на по-голямо разстояние под небесния екватор в южната небесна полусфера и не е изгрявала за Александрия.

(5т.)

Б) Нека първо пресметнем ефективната температура T , тоест тази температура, която звездата трябва да има във всяка точка от повърхността си, за да /излъчва със същата обща светимост. Тъй като приемаме, че нашият зрителен лъч лежи в екваториалната равнина на Ахернар, то звездата се проектира за нас като елипса с голяма полуос $a = 11.4R_{sol}$ и малка полуос $b = 7.3R_{sol}$. Площта на елипса е πab , така че можем да пресметнем ефективния радиус на звездата:

$$R = \sqrt{ab} = 9.12R_{sol}$$

Модулът на разстоянието до Ахернар е:

$$m - M = 5 \lg(r[pc]) - 5 = 3.17$$

Абсолютната визуална звездна величина трябва да бъде $M_V = 0.46^m - 3.17^m = -2.71^m$.

Прилагаме болометричната корекция BC , за да получим абсолютната болометрична звездна величина:

$$M_{bol} = M_V + BC = -3.91^m$$

Сравняваме с абсолютната болометрична звездна величина на Слънцето и от закона на Погсън получаваме светимостта на звезда с радиус R като Ахернар в единици слънчева светимост:

$$\frac{L}{L_{sol}} = 10^{0.4(4.75 - M_{bol})} = 2910$$

Ефективната температура получаваме от закона на Стефан-Болцман:

$$\frac{L}{L_{sol}} = \left(\frac{R}{R_{sol}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{sol}}\right)^4$$

Използвайки температурата на Слънцето $T_{sol} = 5770$ K, получаваме $T = 14\,030$ K.

В действителност, обаче, температурата се мени силно по повърхността на звездата. Заради сплеснатостта гравитационното ускорение е по-високо близо до полюсите, отколкото на екватора. Това означава, че близо до полюсите налягането на газа, което трябва да противодейства на гравитацията, също ще е по-високо, а с него и температурата. Температурата на екватора на Ахернар е около 10 000 K, а на полюсите – около 20 000 K.

(5т.)

В) Като използваме мащаба на графиката, определяме ширината на спектралната линия. Тя е около 12 Å. Доплеровото отместване за скорост $v_R = 250$ km/s можем да намерим от съотношението:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_R}{c}$$

Тук лабораторната дължина на вълната за линията на хелия е $\lambda_0 = 4388$ Å. Разширението на линията, дължащо се на околоосното въртене на звездата, ще бъде $2\Delta\lambda = 7.3$ Å. Следователно само въртенето на звездата не е достатъчно, за да се обясни цялото разширение на линията. Вторият фактор е високата температура на звездата – линията се разширява от бързото хаотично топлинно движение на атомите в нейната атмосфера.

(5т.)

4 задача. Гореща планета. Представете си, че много близо до Слънцето има малка планета, която за земния наблюдател минава пред центъра на слънчевия диск точно един път дневно.

- **А)** Обикновено при планетите, които са много близо до своите звезди, периодите на околоосно въртене са синхронизирани с периодите на орбитално движение. Следователно на повърхността на нашата въображаема планета ще има една точка X, за която Слънцето винаги ще бъде точно в зенита. Каква би била температурата в тази точка? Приемете, че планетата е абсолютно черно тяло и пренебрегнете влиянието на атмосферата.

- **Б)** Има ли звезди с такава фотосферна температура като в точката X? Сравнима ли е температурата на планетата в точката X с температурите на кафявите джуджета? По

какво се различава една нагорещена планета от звезда със същата фотосферна температура? А от кафяво джудже със същата фотосферна температура?

- **В)** Намираме се в точка от планетата, което е диаметрално противоположна на точката X и наблюдаваме Земята. Колко време ще изминава от изгрева на Земята на математическия хоризонт до нейния залез? Колко обиколки би правила тази планета около Слънцето за една земна година?

Решение:

А) След като планетата минава точно 1 път на ден пред диска на Слънцето, синодичният ѝ период спрямо Земята е $T_{syn} = 24$ h. Следователно нейният орбитален период е $T_P = 23\text{h } 56\text{m}$, което се намира от съотношението:

$$\frac{1}{T_P} = \frac{1}{T_{syn}} + \frac{1}{1\text{yr}}$$

От III Закон на Кеплер определяме радиуса на орбитата на планетата около Слънцето:

$$\frac{r[AU]^3}{T_P[yr]^2} = 1$$

Получаваме $r = 2.922 \times 10^6 \text{ km} = 4.20 R_{sol}$.

Ако разгледаме елемент S от повърхността на планетата в точка X, където Слънцето винаги е в зенита и създава осветеност E, получената от този елемент обща енергия от Слънцето за единица време е:

$$P = ES$$

При достигане на равновесие абсолютно черно тяло би излъчвало цялата тази енергия, съгласно закона на Стефан-Болцман:

$$P = S\sigma T^4$$

От последните две уравнения получаваме:

$$E = \sigma T^4$$

Ако светимостта на Слънцето е L, то:

$$E = \frac{L}{4\pi r^2}$$

Заместваме и получаваме:

$$L = 4\pi r^2 \sigma T^4$$

От закона на Стефан-Болцман:

$$L = 4\pi R_{sol}^2 \sigma T_{sol}^4$$

Разделяме почленно двете равенства и намираме:

$$T = T_{sol} \sqrt{\frac{R_{sol}}{r}} = 2815 \text{ K}$$

(5т.)

Б) Най-хладните звезди от главната последователност на диаграмата на Херцшпрунг-Ръсел са с температура около 2600K. Температура 2815 K съответства на спектрален клас M7.5V.

Кафявите джуджета имат температури главно в интервала 1000-2500 K (спектрални класове L и T) и изстиват бързо с времето. Най-младите кафяви джуджета,

които са се формирали наскоро, могат да имат температури около 2800 К и да бъдат от спектрален клас М.

Основният параметър, по който се различават планетите, кафявите джуджета и звездите, е масата. При звездите с маса над 0.077 слънчеви маси (над 80 маси на Юпитер) се създава достатъчно налягане в ядрото, за да се синтезира хелий от водород. Термоядреният синтез осигурява енергията за поддържане на равновесието на звездата, поради което червените джуджета имат много дълго време на живот.

При кафявите джуджета (маса 13-80 маси на Юпитер) се активизира само синтез на деутерий, но не и на хелий. Кафявото джудже излъчва енергията, произведена от този термоядрен синтез, както и енергията от своето продължаващо гравитационно свиване от времето, в което се е образувало. Това не са стабилни източници на енергия. Ето защо, температурата на кафявото джудже намалява драстично в първите около 100 милиона години от живота му.

Планетата не генерира енергия от термоядрен синтез и бързо след образуването си излъчва цялата енергия от гравитационното свиване. Горещата планета преизлъчва енергия от звездата. *Тъй като е по-лесно да се откриват екзопланети близо до звездите, немалко от откритите екзопланети имат температури над 2000 К.*

(5т.)

В) Изгрев на Земята от планетата ще се наблюдава при максимална източна елонгация на ъгъл θ на планетата за наблюдател от Земята. Залез ще се наблюдава при максимална западна елонгация θ на планетата. Между двете елонгации планетата изминава по орбитата си ъгъл $180 - 2\theta$

$$\sin \theta = \frac{r}{1AU}$$

Времето t между източна и западна елонгация намираме от равенството:

$$\frac{t}{T_{syn}} = \frac{180 - 2\theta}{360} = \frac{1}{2} - \frac{\theta}{180} = 11h 51m$$

Орбиталният период на планетата е равен на звездното денонощие (23h 56m), следователно за една земна година планетата ще прави 366.25 обиколки около Слънцето.

(5т.)

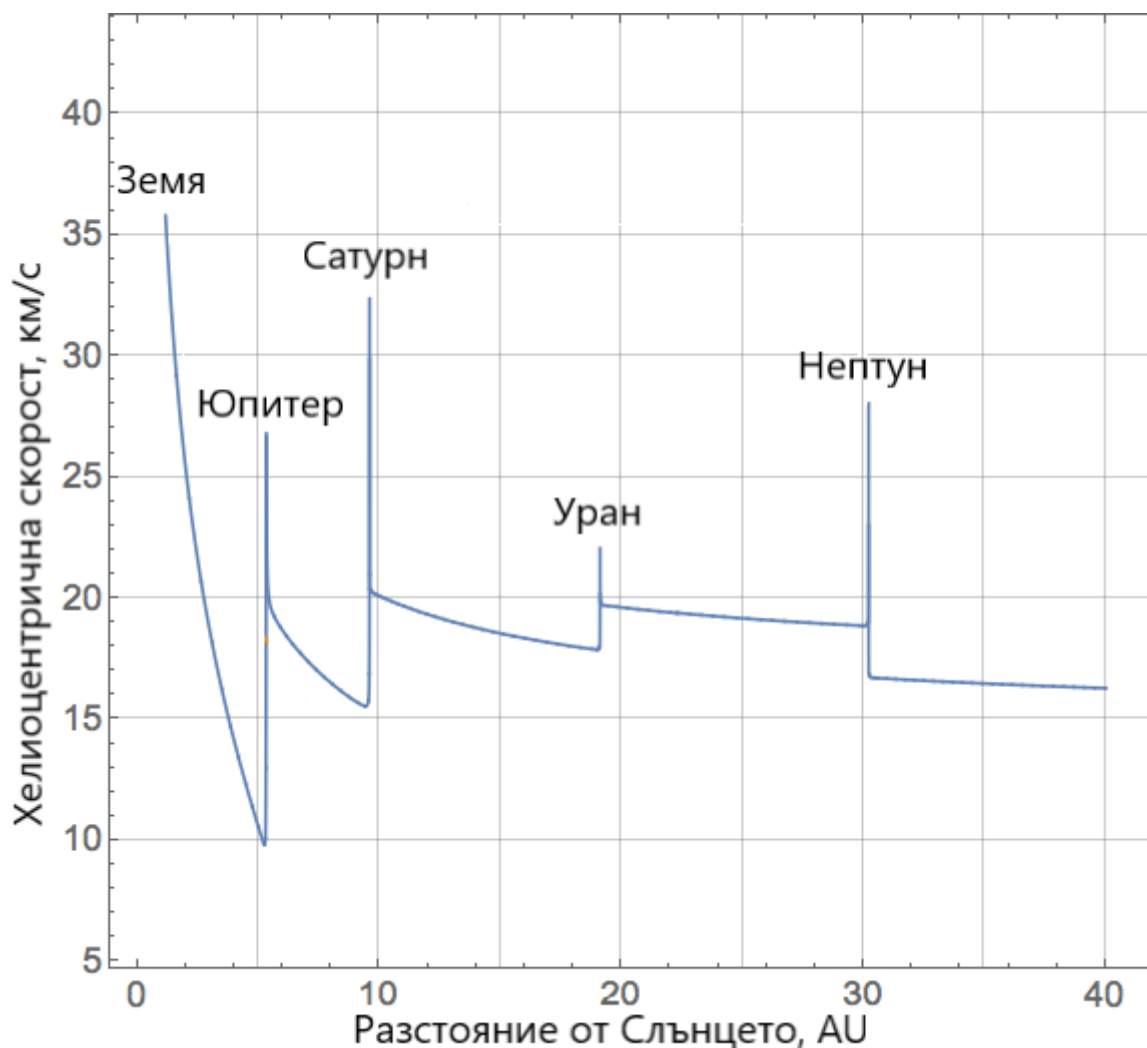
5 задача. Voyager 2. Космическата станция Voyager 2 е изстреляна от Земята през 1977 г. Тя е прелетяла последователно покрай Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун и е предала на Земята уникални снимки на тези планети и техните спътници.

При близкото прелитане покрай всяка от планетите гиганти скоростта на космическата станция е била променяна в резултат от тяхното гравитационно въздействие – траекторията на станцията е била изчислена така, че да се получи т.нар. ефект на „гравитационната прашка“. На графиката е показана зависимостта на хелиоцентричната скорост на станцията (скорост относно Слънцето) от нейното разстояние до Слънцето.

- **А)** Определете общото количество енергия, която е била „спечелена“ след преминаването на станцията покрай всичките четири планети. Направете това по два начина и сравнете получените отговори.

- **Б)** Определете приблизително с колко се е променила голямата полуос на орбитата на Юпитер след като станцията е прелетяла покрай него.

Масата на станцията Voyager 2 е 721.9 кг



Решение:

Участъците от графиката, отбелязани на фигурата по-долу с 1-2, 4-5, 7-8, 10-11 и от точка 13 нататък, отразяват движението на станцията Voyager 2 по инерция между планетите, под действие единствено на гравитацията на Слънцето. Участъците, означени с 2-3, 5-6, 8-9 и 11-12, съответстват на близкото гравитационно взаимодействие между станцията и всяка от четирите планети, при което скоростта на станцията се променя значително. При всяко от тези взаимодействия станцията се сближава с планетата и се ускорява в нейното гравитационно поле, или може още да се каже, че планетата „увлича“ станцията със себе си при своето орбитално движение около Слънцето. Тогава именно се осъществява ефектът на „гравитационна прашка“. Участъците 3-4, 6-7, 9-10 и 12-13 съответстват на интервалите, през които станцията, след като е получила значително повишение на скоростта си относно Слънцето, постепенно се отдалечава от планетата и в резултат от гравитационното привличане на планетата скоростта ѝ до известна степен намалява. Това продължава докато станцията се отдалечи на достатъчно голямо разстояние от планетата и доминиращият фактор, който определя нейното движение, отново става слънчевата гравитация. Оттук можем да направим извода, че в крайна сметка „спечелената“ енергия в резултат от близкото гравитационно въздействие на планетите се определя от разликите между скоростите на станцията в моментите 2 и 4 при преминаването покрай Юпитер, 5 и 7 при преминаването покрай Сатурн, 8 и 10 при

преминаването покрай Уран и 11 и 13 при преминаването покрай Нептун. Виждаме също и че при последното взаимодействие станцията всъщност е загубила енергия. Това се е получило, понеже тогава е била извършена по-различна маневра, при която е била променена равнината на орбитата на станцията Voyager 2, така че тя да прелети над полюса на спътника Тритон.

Да означим скоростите на станцията в точките 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11 и 13 съответно с v_2 , v_4 , v_5 , v_7 , v_8 , v_{10} , v_{11} , и v_{13} . Определяме мащаба на графиката по вертикалната ос, измерваме отсечките, отговарящи на тези скорости и пресмятаме техните стойности:

$$v_2 = 9.45 \text{ km/s}, v_4 = 19.68 \text{ km/s}, v_5 = 15.48 \text{ km/s}, v_7 = 20.32 \text{ km/s}, \\ v_8 = 17.85 \text{ km/s}, v_{10} = 19.66 \text{ km/s}, v_{11} = 18.82 \text{ km/s}, v_{13} = 16.67 \text{ km/s}$$

Спечелената енергия от станцията след взаимодействието с четирите планети ще бъде:

$$\Delta E = \left(\frac{mv_4^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} \right) + \left(\frac{mv_7^2}{2} - \frac{mv_5^2}{2} \right) + \left(\frac{mv_{10}^2}{2} - \frac{mv_8^2}{2} \right) + \left(\frac{mv_{13}^2}{2} - \frac{mv_{11}^2}{2} \right)$$

където m е масата на станцията Voyager 2.

$$\Delta E \approx 1.67 \times 10^{11} \text{ J (джаула)}$$

Друг начин да определим спечелената енергия е да намерим пълната механична енергия на станцията E_2 преди близкото взаимодействие с Юпитер и да я сравним с пълната механична енергия E_{13} след взаимодействието с Нептун. За целта определяме мащаба по хоризонталната ос на графиката, измерваме и пресмятаме разстоянията на станцията до Слънцето в точки 2 и 13, означаваме ги с r_2 и r_{13} и получаваме:

$$r_2 = 5.27 \text{ AU}, \quad r_{13} = 29.89 \text{ AU}$$

Означаваме с $M_\odot$ масата на Слънцето и за пълната механична енергия на станцията намираме:

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{\gamma M_\odot m}{r_2} \\ E_{13} = \frac{mv_{13}^2}{2} - \frac{\gamma M_\odot m}{r_{13}}$$

$$\Delta E = E_{13} - E_2 \approx 1.68 \times 10^{11} \text{ J (джаула)}$$

Така получаваме приблизително същата стойност за спечелената енергия при маневрите на „гравитационна прашка“, извършени от станцията.

Пълната механична енергия на Юпитер преди взаимодействието със станцията е:

$$E_{J0} = -\frac{\gamma M_\odot M_J}{2a}$$

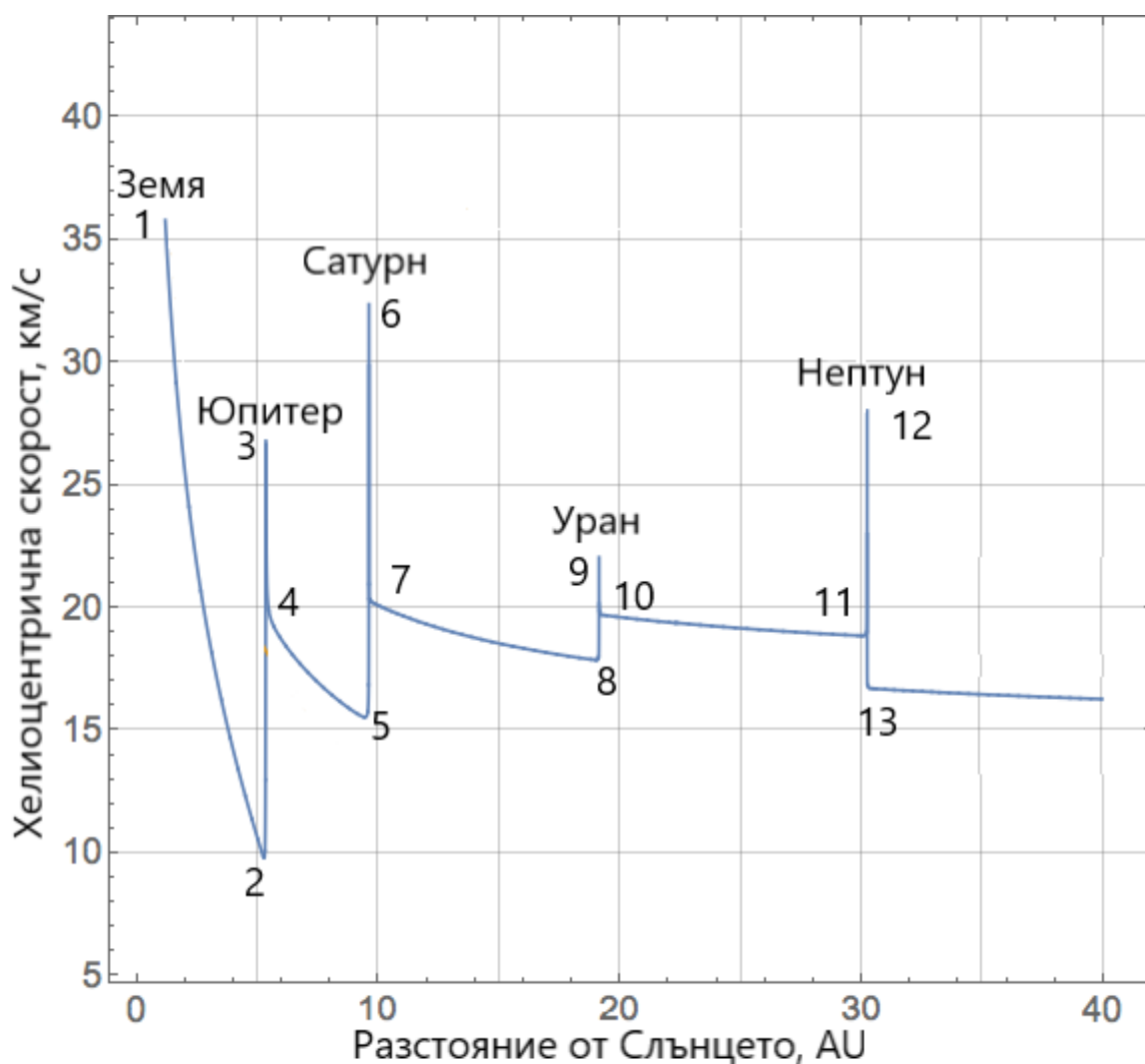
където $a = 5.20 \text{ AU} \approx 777.92 \times 10^6 \text{ km}$ е голямата полуос на орбитата на планетата. При преминаването покрай Юпитер космическата станция се ускорява и придобитата от нея допълнителна енергия е за сметка на намаляване на пълната механична енергия на Юпитер. След взаимодействието с Юпитер и отдалечаването на станцията от него пълната механична енергия на Юпитер е била:

$$E_J = E_{J0} - \left(\frac{mv_4^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} \right) = E_{J0} - \Delta E_{k24} \\ E_J = -\frac{\gamma M_\odot M_J}{2(a - \Delta a)}$$

където Δa е величината, с която намалява голямата полуос на неговата орбита около Слънцето. Оттук получаваме:

$$\Delta a = a \cdot \frac{\Delta E_{k24}}{\frac{\gamma M_\odot M_J}{2a} + \Delta E_{k24}} \\ \Delta a \approx 5.16 \times 10^{-13} \text{ m}$$

Получаваме удивителен резултат – голямата полуос на Юпитер намалява с величина, около 200 пъти по-малка от размера на водородния атом. Това разбира се, се дължи на колосалната маса на планетата Юпитер в сравнение с нашата космическа станция.



Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За правилен метод за определяне на спечелената енергия по първия начин, за измервания и изчисления – 5 т.

За правилен метод за определяне на спечелената енергия, за измервания и изчисления – 5 т.

За сравнение на резултатите – 1 т.

За правилен начин за определяне на промяната на голямата полуос на орбитата на Юпитер – 3 т.

За верен числен отговор – 1 т.

Справочни данни, които могат да се използват във всички задачи:

Маса на Земята $6 \cdot 10^{24}$ kg
Радиус на Земята 6 371 km.
Маса на Слънцето 1.99×10^{30} kg
Радиус на Слънцето 696 000 km
Температура на Слънцето 5770 K
Абсолютна болометрична звездна величина на Слънцето 4.75^m
Маса на Юпитер 1.9×10^{27} kg
Радиус на орбитата на Юпитер 5.20 AU
Астрономическа единица 149.6×10^6 km
Гравитационна константа 6.67×10^{-11} m³ / kg.s²