

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
КОМИСИЯ ЗА ПРОВЕЖДАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ
XXIV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
<http://astro-olymp.org>

IV кръг, 23 юли 2021 г., Варна, практически тур

Старша възраст – решения

Задача 1. Екзопланети. Кунсткамера. Основните два метода за откриване на извънслънчеви планети са методът на пасажите и методът на лъчевите скорости на звездите, наблюдавани с голяма точност. Досега са открити почти пет хиляди извънслънчеви планети и повечето от тях нямат аналог в Слънчевата система.

- А) Да си представим планета, която се движи по орбита с период, два пъти по-малък от периода на въртене на звездата около оста ѝ, и при всеки втори пасаж преминава пред петно, което по размери е сравнимо с размерите на планетата. Нека звездата има маса и радиус, равни на слънчевите. Планетата е 16 пъти по-малка от звездата и се движи по кръгова орбита с радиус 35×10^6 km. Нека температурата на звездата е 5770 K, а средната температура на петното е 4380 K. Начертайте как ще изглежда кривата на блясъка на звездата по време на пасажа в относителни единици на потока светлина, т.е. приемерте, че извън пасажа потокът е равен на 1. Приемерте, че в средата на пасажа петното се намира в центъра на диска на звездата. *За тази и следващите части на задачата използвайте упътването, дадено в края на условието.* [8 т.]

- Б) Нека около звездата обикаля и втора планета, която е два пъти по-малка от първата, но с два пъти по-голям период. При част от пасажите, когато петното е от обратната страна на звездата, първата планета преминава зад втората точно в средата на пасажа ѝ. Постройте кривата на блясъка на звездата по време на пасажа на втората планета. [8 т.]

- В) Ще бъдат ли равни амплитудите на кривите на пасажите на първата планета с петно и без петно върху диска на звездата (когато то изчезне)? Обяснете защо. [1 т.]

- Г) При затъмнително променливи звезди, по време на затъмненията на една от компонентите, се наблюдава малка вълна в кривата на лъчевите скорости, дължаща се на това, че последователно се засенчват части от диска на по-далечната звезда, която се върти в някаква посока около оста си. Поради засенчването намалява част от светлината, която е отместена към червения или синия край на спектъра вследствие на ефекта на Доплер. Подобен ефект, наречен ефект на Роситър-Маклафлин, се наблюдава и по време на пасаж на екзопланета върху диска на звезда. Ако планетата обикаля по кръгова орбита в посока обратна на въртенето на звездата около оста ѝ, как ще изглежда малката вълна върху кривата на лъчевите скорости? Нарисувайте примерна крива на лъчевите скорости на звездата и означете с кръгче мястото, където трябва да се появи вълната. На отделна фигура нарисуйте схематично как ще изглежда вълната, възникнала вследствие на ефекта на Роситър-Маклафлин, в увеличен вид. На какво е равна продължителността на ефекта? [3 т.]

Упътване. 1. Пасажите са централни и планетите се движат по орбитите си в права посока относно околоосното въртене на звездата. 2. Приемникът на светлина работи в целия спектрален диапазон. 3. Постройте кривите, като приемерте, че потъмнението към края на диска на звездата не съществува. 4. Оцифровайте двете оси на графиките: ординатата в относителен поток, с точност до 1 десетохилядна от потока, а абцисата в подходящи времеви единици. Амплитудите и продължителността на явленията, както и моментите на контактите следва да са пресметнати и начертани точно. Означете върху графиките моментите на 1, 2, 3 и 4-ти контакт. Особеностите във формата на кривите да се представят качествено.

Справочни данни:

Радиус на Слънцето – 696000 km

1 au = 149 597 870 700 m

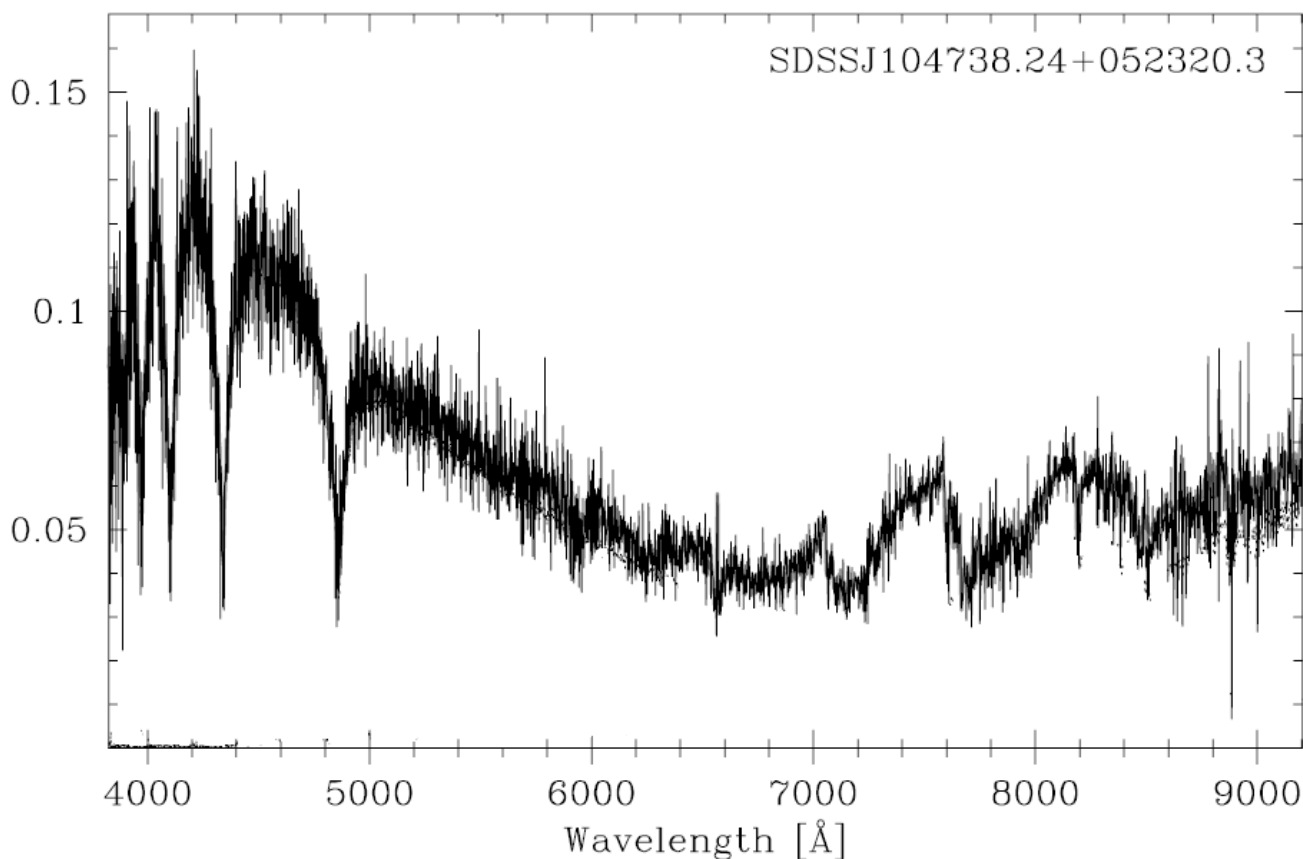
Орбитален период на Земята – $T = 365^d.25636$

Решение:

...

Захари Дончев

Задача 2. Тясна двойна система. Тясната двойна система SDSS J104738.24+052320.3 (накратко SDSS 1047+0523) се състои от бяло джудже и червено джудже. Спектър на системата в диапазона 3800-9200 ангстрьома е даден на Фиг. 1.



Фиг. 1

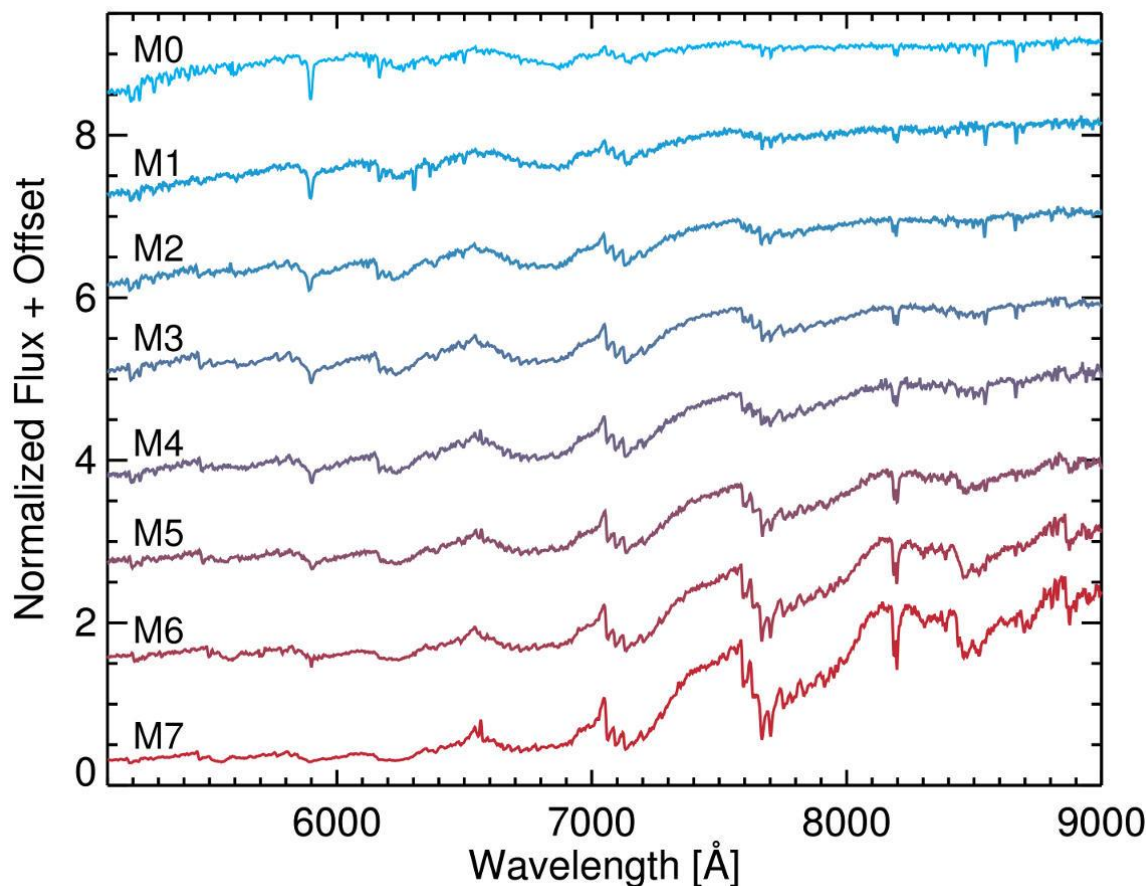
Видимите звездни величини на обекта в система Вега са: $g = 19.10$, $i = 18.22$. По разширението на Балмеровите линии е пресметнато гравитационното ускорение на повърхността на бялото джудже $g = 350\,000\text{ m/s}^2$. Разстоянието до обекта е 480 pc, а температурата на бялото джудже е 12400 K. Болометричната корекция в g за тази температура е $M_{\text{bol}} - M_g = -0.6\text{ mag}$.

- А) Определете масата на бялото джудже в слънчеви маси. Може да приемете, че червеното джудже не свети изобщо във филтър g , както и да пренебрегнете междувездната екстинкция. Абсолютната звездна величина на Слънцето е $+4.75\text{ mag}$. Приемете, че бялото джудже свети със спектър, близък до този на Вега, т.е. има еднаква абсолютна звездна величина във всички филтри. [4 т.]
- Б) Приемете, че бялото джудже свети със спектър, близък до този на Вега. Използвайки звездните величини в g и i , върху дадения на работния лист спектър начертайте изолирания спектър на бялото джудже максимално точно. Извадете го графично от целия спектър и нарисувате върху фигурата и спектъра на червеното джудже. Филтър g обхваща дължини на вълната от 4000 до 5500 Å, а филтър i – от 7000 до 8500 Å. [3 т.]

- В) Оценете светимостта на червеното джудже, ако приемете, че отношението на потоците от бялото джудже и червеното джудже в интервала 3800-7200 Å е равно на отношението на светимостите им в целия електромагнитен спектър. Дадена е таблица с типични температури, светимости и маси на М-джуджета по главната последователност. От получената светимост намерете най-вероятния спектрален клас и очакваната маса на червеното джудже. [3 т.]

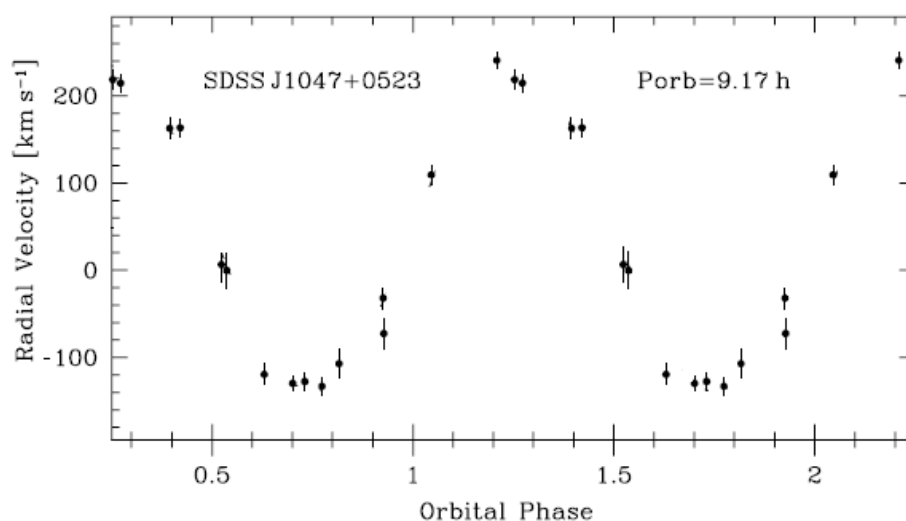
Спектр. клас	T [K]	L [L_{sol}]	M [M_{sol}]
M0	3750	0.080	0.49
M1	3700	0.055	0.44
M2	3600	0.035	0.38
M3	3500	0.027	0.36
M4	3400	0.022	0.34
M5	3200	0.011	0.28
M6	3100	0.0051	0.22
M7	2900	0.0032	0.19
M8	2700	0.0020	0.17

- Г) На Фиг. 2 са дадени примерни спектри на червени джуджета от класове M0-M7. Сравнявайки с тях, определете визуално от кой спектрален клас е червеното джудже в SDSS 1047+0523. Изполвайки таблицата от предното подусловие, определете очакваната маса на червеното джудже. [3 т.]



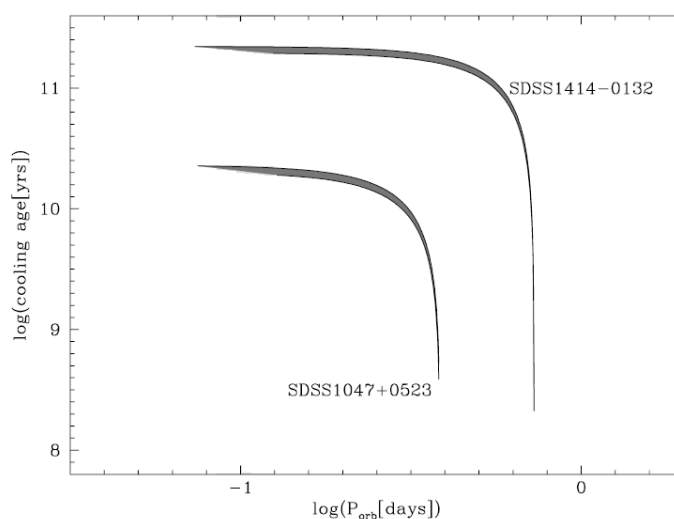
Фиг. 2

- Д) На Фиг. 3 е дадена крива налъчевите скорости, получена по дублетната линия на натрия с дължини на вълната 8183 А и 8195 А. Правете измерванията си върху кривата *на работния лист*. Ако приемете, че компонентите на системата лежат в равнината на зрителния лъч, пресметнете масата на червеното джудже. [4 т.]



Фиг. 3

- Е) Компонентите в системата са много близки и се движат с високи скорости, поради което загубата на енергия от излъчване на гравитационни вълни ще се окаже значителна в бъдеще. На Фиг. 4 са дадени резултатите от модел на SDSS 1047+0523, който приема маса на системата 0.6 слънчеви маси. Те показват как периодът на системата ще се скъсява в бъдеще поради излъчване на гравитационни вълни. И двете оси са в логаритмична скала, времето от настоящия момент е дадено в години по у-оста, а орбиталният период – по х. Определете сумарната енергия, която системата ще излъчи в гравитационни вълни в следващите 13.7 милиарда години според този модел. Правете измерванията си *върху работния лист*. [3 т.]



Справочни данни:

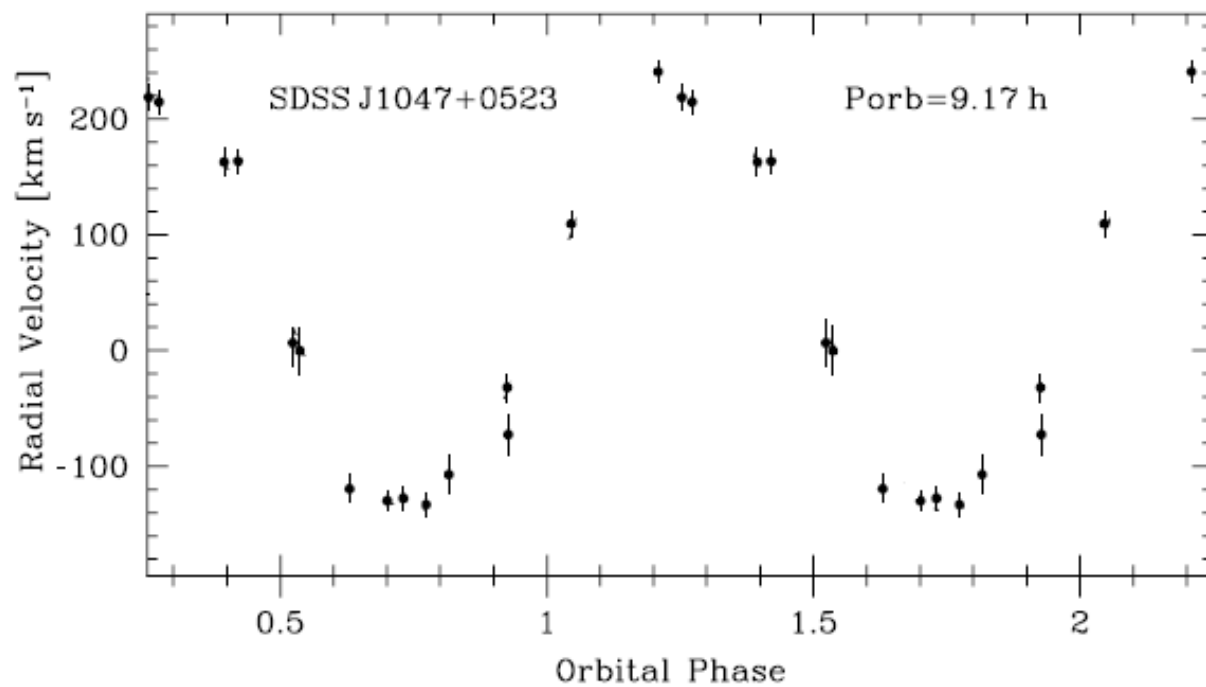
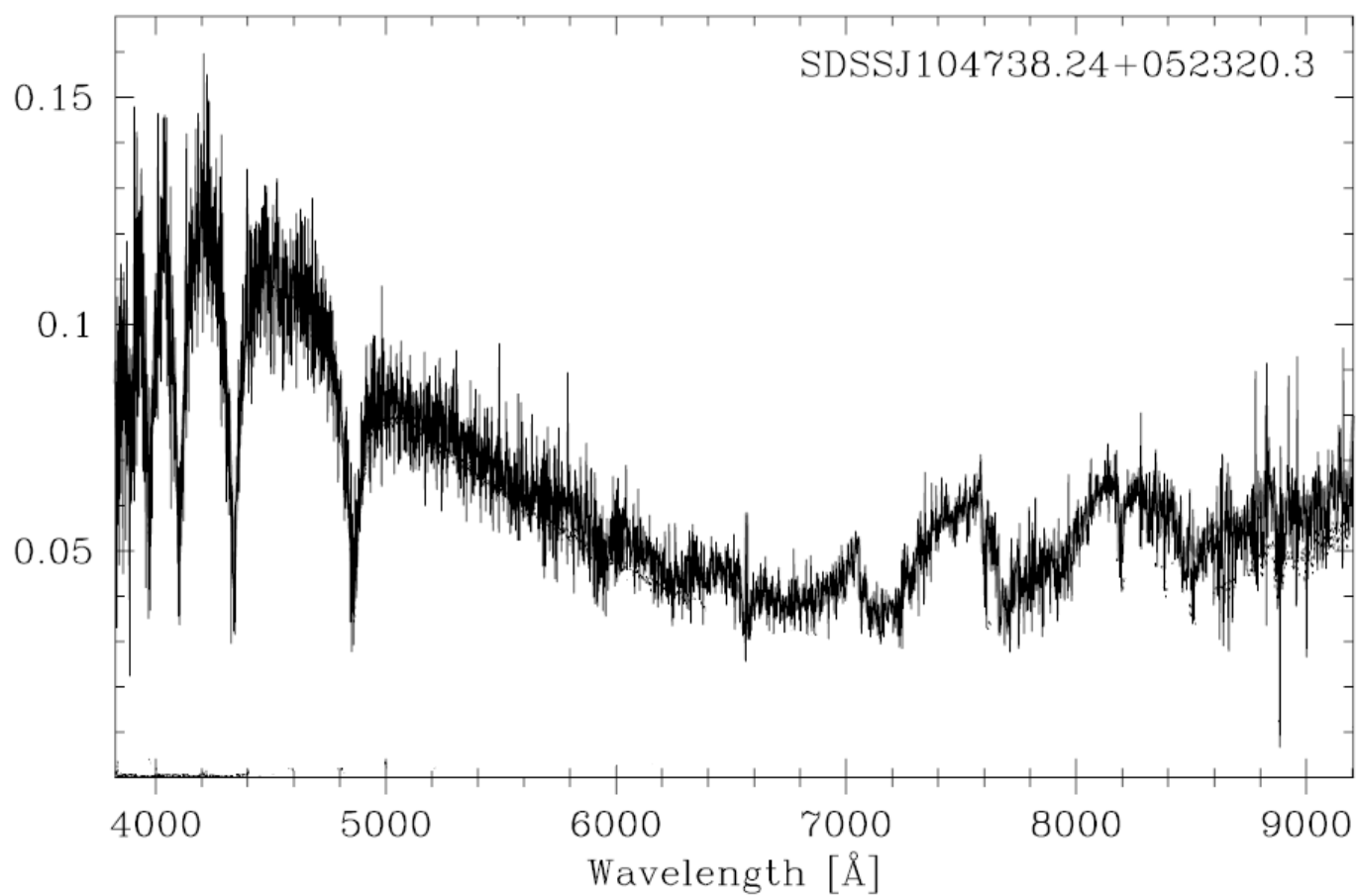
Гравитационна константа – $G = 6.67 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Радиус на Слънцето – 696000 km

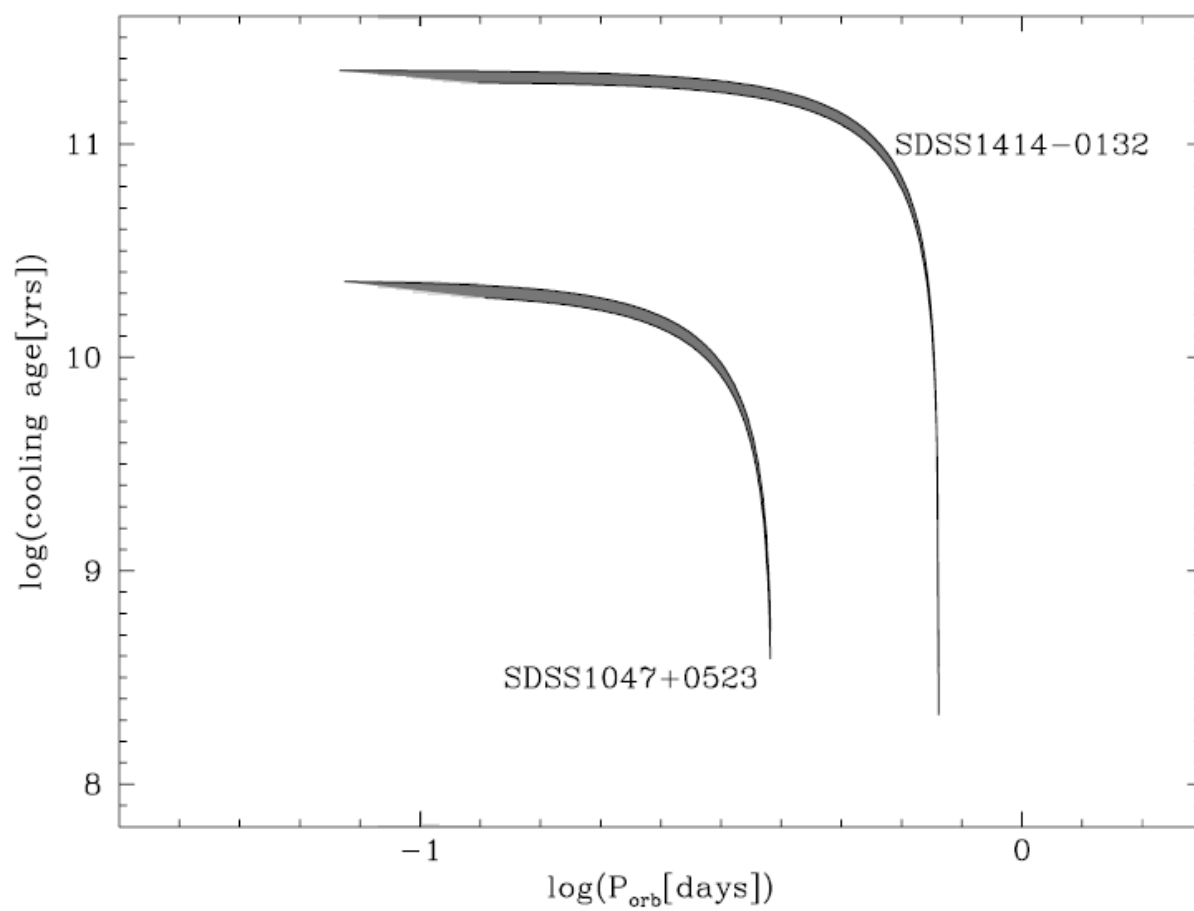
Маса на Слънцето – $1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

Температура на Слънцето – 5770 K

Работен лист по Задача 2 – правете измерванията си тук и предайте листа заедно с решенията!



Работен лист по Задача 2 – правете измерванията си тук и предайте листа заедно с решенията!



Решение:

а) Модулът на разстоянието е

$$g - M_g = 5 \lg(r[\text{pc}]) - 5 = 8.41 \text{ mag.}$$

Абсолютната болометрична звездна величина е $M_{\text{bol}} = 19.10 - 8.41 - 0.6 = 10.09$. Тъй като червеното джудже не свети в g, това е характеристика само на бялото джудже. Намираме светимостта на бялото джудже от закона на Погсън. Сравняваме със Слънцето, тъй като всички звездни величини на бялото джудже са приблизително равни:

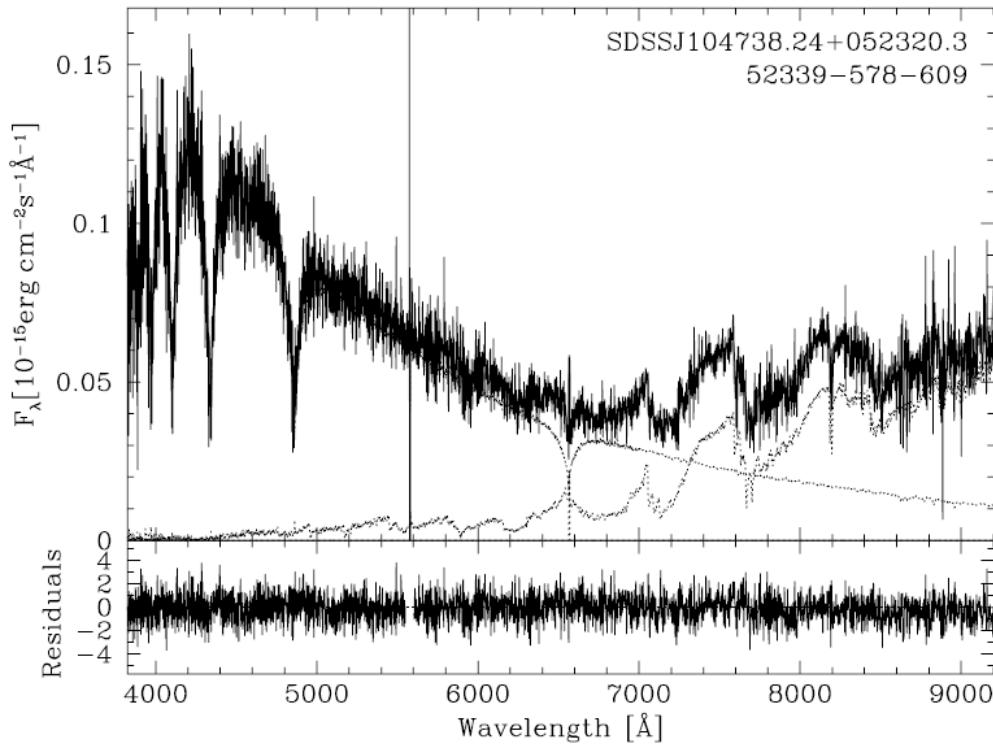
$$\frac{L}{L_{\text{sol}}} = 10^{-0.4(M_g - M_{\text{sol}})} = 0.0073.$$

От закона на Стефан-Болцман намираме радиуса на бялото джудже:

$$\frac{L}{L_{\text{sol}}} = \left(\frac{R}{R_{\text{sol}}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\text{sol}}}\right)^4.$$

Получаваме $R = 0.0185 R_{\text{sol}}$. Намираме масата от формулата за гравитационно ускорение на повърхността, $g = \frac{GM}{R^2}$. Масата е $M = 0.43 M_{\text{sol}}$.

б) Приемаме, че бялото джудже има еднаква звездна величина във всички филтри, следователно звездната величина на изолираната му светлина в i трябва да е около 19.10. С приноса на червеното джудже звездната величина на системата става 18.22, т.е. с 0.88 mag по-ярка. Следователно, между 7000 и 8500 Å (филтър i) червеното джудже допринася с малко повече от 50% от потока ($2.5 \lg 2 = 0.75 \text{ mag}$). Продължаваме спектъра на бялото джудже надясно, следейки Планкова крива и отрязвайки около $\frac{1}{2}$ от площта под спектъра (потока) между 7000 и 8500 Å. После вадим този спектър графично от общия спектър на обекта и получаваме изолирания спектър на червеното джудже. Декомпозицията може да се види с тънки линии на графиката:



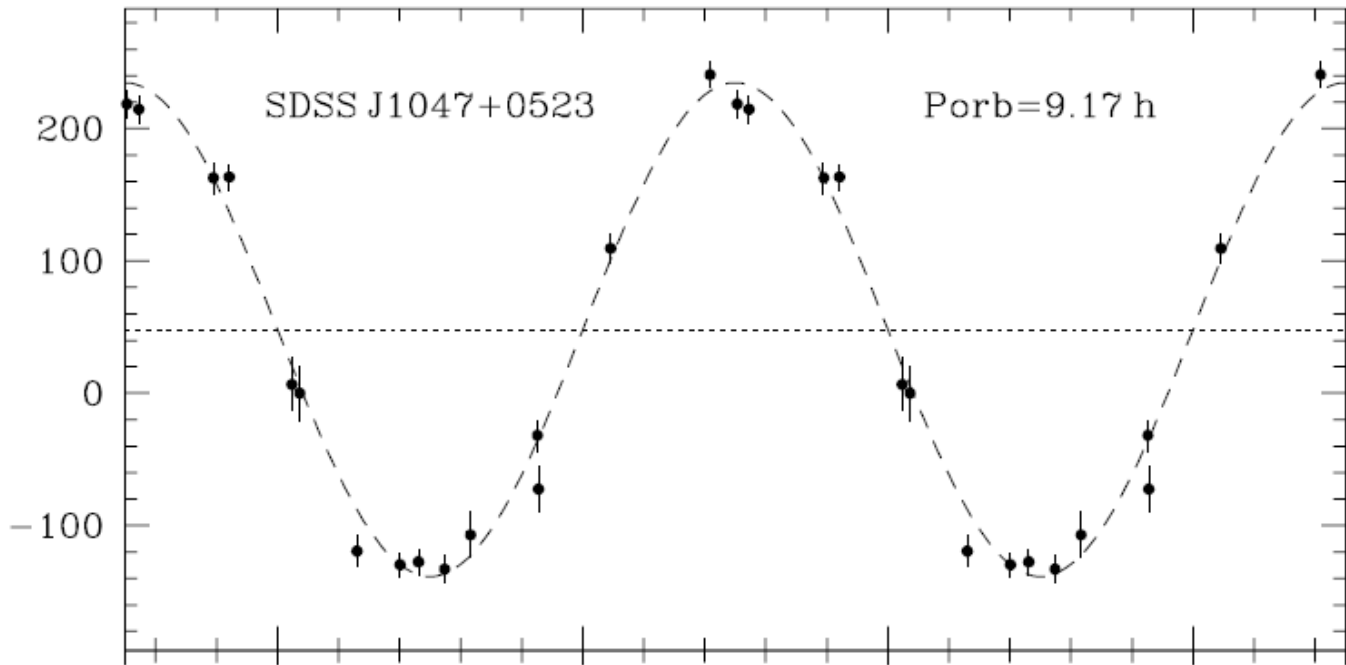
в) По декомпозирания спектър мерим отношението на потоците от бялото и от червеното джудже. Получаваме около 4. С грубото приближение, че и в целия електромагнитен спектър

$$\frac{L_{WD}}{L_M} \approx 4,$$

светимостта на червеното джудже се получава около 0.0018 слънчеви. Сравнявайки с таблицата, получаваме спектрален клас M8 и маса на червеното джудже **0.17 M_{sol}** .

г) Сравнявайки визуално дълбочината на молекулните ивици на TiO с тези на примерните спектри, получаваме спектрален клас M6 и маса на червеното джудже **0.2 M_{sol}** .

д) Прокарваме плавна синусоидална крива през точките на графиката, за да получим кривата на лъчевите скорости.



Минимумът е при -135 km/s , а максимумът при $+235 \text{ km/s}$. Половината амплитуда е $v_2 = 185 \text{ km/s}$. Това е скоростта на червеното джудже около центъра на масите, защото измерваната светлина (при 8200 Å) е от червеното джудже. Записваме III Закон на Кеплер:

$$\frac{(r_1 + r_2)^3}{P^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}.$$

Ако относителната скорост на двете компоненти една спрямо друга е v , то

$$\frac{v}{v_2} = \frac{v_1 + v_2}{v_2} = \frac{M_1 + M_2}{M_1} \equiv (1 + q),$$

$$r_1 + r_2 = \frac{vP}{2\pi}.$$

Заместваме в III Закон на Кеплер:

$$\frac{(vP)^3}{P^2} = 2\pi G(M_1 + M_2),$$

$$v^3 = 2\pi G M_1 (1 + q) / P.$$

Изразяваме v с v_2 и решаваме за отношението на масите q :

$$v_2^3 (1 + q)^3 = 2\pi G M_1 (1 + q) / P,$$

$$(1 + q)^2 = \frac{2\pi G M_1}{P v_2^3}.$$

Получаваме отношение на масите 0.31, т.е. маса на червеното джудже **0.13 M_{sol}** . В реалния случай това е горна граница, тъй като не знаем наклона на орбитата (отклонение i от равнината на зрителния лъч внася коефициент $\cos^3 i$ в дясната страна на горното уравнение).

е) Логаритъм от времето в години е $\lg(13.7 \times 10^9) = 10.14$. Нанасяме на диаграмата хоризонтала с $y = 10.14$. Тя пресича графиката в $x = -0.58$, което е логаритъм от периода в дни. Следователно периодът на системата след 13.7 милиарда години ще бъде

$$P_{13.7} = 10^{-0.58} \text{ d} = 6.31 \text{ h.}$$

Пълната механична енергия на орбитата е

$$E = -\frac{GM_1M_2}{2a}.$$

Промяната ѝ между началния и крайния момент представлява енергията ΔE , излъчена като гравитационни вълни, тоест

$$\Delta E = -\frac{GM_1M_2}{2} \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{13.7}} \right).$$

Изразяваме големите полуоси с III закон на Кеплер, получавайки

$$\Delta E = M_1M_2 \left(\frac{\pi^2 G^2}{2(M_1 + M_2)} \right)^{\frac{1}{3}} \left(P_{13.7}^{-\frac{2}{3}} - P_0^{-\frac{2}{3}} \right) = 2.1 \times 10^{39} \text{ J.}$$

Александър Куртенков