

XXVII Национална олимпиада по астрономия

Подборен кръг, 10.07.2024 г., Варна, практически тур
Старша възраст – решения

Задача 1. Северно затъмнение. Магнитното поле на Земята е сложно, като положението на магнитните полюси се променя с времето. На Фигура 1 е даден пътът на северния магнитен полюс, получен с помощта на реални измервания и моделиране. Всяка точка от пътя съответства на една година. Изопачаването на тглите и разстоянията поради проекцията на картата може да се пренебрегне, тоест мащабната отсечка може да се ползва навсякъде по картата. Приема се, че навсякъде компасите сочат право към северния магнитен полюс.

- а) Намерете максималната скорост $v_{\max}$ на северния магнитен полюс по земната повърхност за дадения интервал. Дайте отговора си в mm/s. **[2 т.]**
- б) За някои места по Земята може да се окаже, че посоката север според компаса всъщност е географската посока юг. Между 2000 и 2020 такова явление е можело да се наблюдава поне веднъж в рамките на някаква зона по земната повърхност. Намерете каква част q от пълната площ на земната повърхност се явява тази зона. **[2 т.]**
- в) През 2003 изследовател тръгва на експедиция към северния полюс, следвайки компаса си. Той стартира от инуитското селище Grise Fiord и се движи със средна скорост за денонощие $v = 2 \text{ km/h}$. С какво разстояние s ще се е приближил до северния полюс за време $T = 3 \text{ d}$ след старта? **[2 т.]**

Някъде из Канадския арктичен архипелаг, а може би и на самите океански ледове, живее самотен инуитски шаман. За него слънчевият диск не се подава над хоризонта за цели $T_0 = 137 \text{ d}$ от годината. Между 1995 и 2015 направлението север според компаса му се е изместило с 90° , което той отдава на някаква магия. Още по-удивително за шамана е пръстеновидното слънчево затъмнение, което той наблюдава през 2021.

На Фигура 2 е дадена карта, показваща видимостта на това затъмнение от Земята. В рамките на пояса „Annular“ затъмнението се наблюдава като пръстеновидно. Кривите с 0.80, 0.60, 0.40 и т.н. указват местата, където затъмнението се наблюдава като частично и максималната му фаза е именно такава. Кривите с 9:00 UT, 9:30 UT, 10:00 UT и т.н. указват местата, където именно в такива моменти по UT затъмнението е в максимална фаза. Кривата с форма на осмица не е от значение за задачата. В затъмнената част от картата Слънцето е под хоризонта. Географските паралели са начертани през интервали от 30° .

- г) Нанесете върху Фигура 1 положението на шамана (точка W). Опишете построенията си достатъчно подробно. **[3 т.]**
- д) По какво местно време наблюдава шаманът затъмнението? **[2 т.]**
- е) Оценете с точност 5° височината h над хоризонта, на която шаманът вижда Слънцето по време на затъмнението. Оценете с точност 30° астрономическия азимут на Слънцето в този момент. **[3 т.]**
- ж) През кой месец става затъмнението? **[2 т.]**

Както много други мекотели, варненският полярен охлюв може да усеща магнитни полета. През 2003 един такъв охлюв тръгва от изследователската станция Alert, като движението му е винаги насочено по направление към северния магнитен полюс. Скоростта му по земната

повърхност винаги се поддържа равна по големина на тази на полюса. След 2003 траекторията на полюса може да се приеме за праволинейна.

Оказва се, че при такова движение охлювът никога няма да успее да догони магнитния полюс. Той само ще достигне някакво минимално разстояние от него $l_{\min}$.

з) Намерете $l_{\min}$.

[4 т.]

Указание: Броят дни, през които никоя част от Слънцето не се подава над хоризонта, се задава приблизително с формулата

$$T = \left(\frac{1}{2} - \frac{\arcsin \left(\frac{\cos(\varphi - \rho_{\odot} - \rho)}{\sin \varepsilon} \right)}{180^\circ} \right) T_E,$$

където φ е географската ширина, $\delta_{\odot}$ е ъгловият размер на Слънцето, ρ е рефракцията на хоризонта, а T_E е продължителността на годината.

Указание: При решаването на последната част разгледайте движението на охлюва и полюса в подходяща координатна система. Запишете изрази за темпа на промяната на пълното им отстояние и темпа на промяната на отстоянието им по посоката на движение на полюса. Така открийте удобна комбинация от величини, която ще се запазва през цялото движение.

Справочни данни:

Радиус на Земята

$$R_E = 6370 \text{ km}$$

Наклон на земната ос

$$\varepsilon = 23^\circ 26'$$

Ъглов радиус на Слънцето

$$\rho_{\odot} = 16'$$

Рефракция на хоризонта

$$\rho = 35'$$

Решение.

а) Скоростта на магнитния полюс е максимална там, където точките от пътя му са най-нарядко. Ще разгледаме достатъчно дълъг интервал около този момент, например между 2004 и 2015. Този интервал указваме с AB върху фигурата. Дължината му съгласно мащаба е около 610 km, което дава скорост $v_{\max} = 55 \text{ km/yr} = \boxed{1.7 \text{ mm/s}}$.

б) Местата, изпълняващи условието, са всички точки X , намиращи се точно по средата между северния географски и северния магнитен полюс, тъй като именно за тях $\angle NXC = 180^\circ$. Търсена зона съответно се определя от площта, която замита отсечката, свързваща северния географски със северен магнитен полюс. За 2000-2020 това е на практика площта на $\triangle NCD$ от фигурата. Тази площ S намираме с

$$S = \frac{NH \cdot CD}{2} = 185\,000 \text{ km}^2.$$

Търсеното отношение на площи се задава с

$$q = \frac{S}{4\pi R_E^2} = 3.6 \times 10^{-4} = \boxed{0.036 \%}.$$

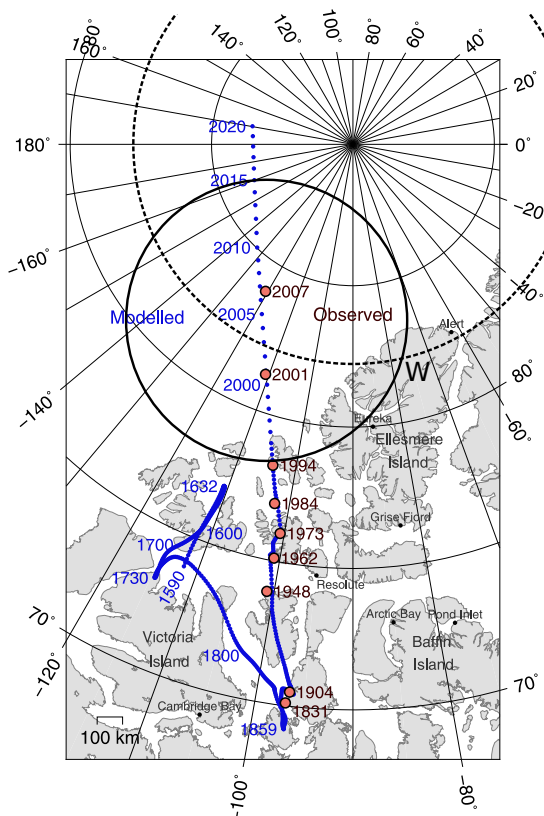
в) Тъй като преместването на изследователя за $T = 3 \text{ d}$ ще е сравнително малко, е по-добре да не измерваме s по фигурата. Трябва да съобразим, че само част от движението на изследователя е на север. Отчитаме, че ъгълът между полюса тогава P , селището Grise Fiord и северния полюс N е приблизително $\alpha = 30^\circ$. Само част $\cos \alpha$ от преместването на изследователя ще е насочена към N . Доближаването му към полюса е съответно

$$s = vT \cos \alpha = \boxed{125 \text{ km}}.$$

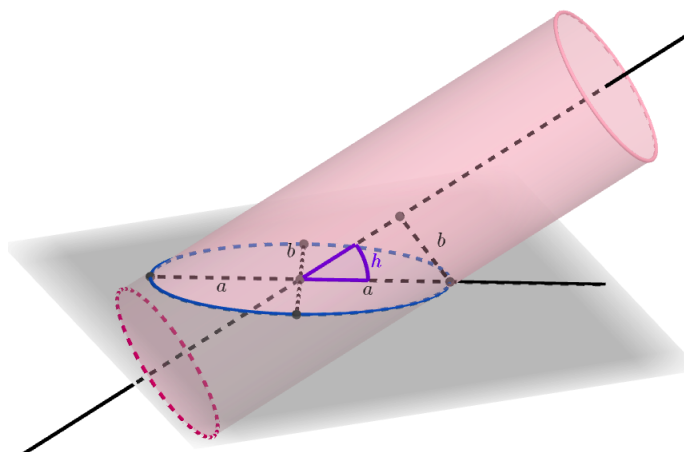
г) По формулата за брой полярни дни пресмятаме, че географската ширина на шамана е $\varphi = 82.1^\circ$. Начертаваме по картата паралела на шамана. Знаем от условията, че шаманът е на такова положение, че магнитните полюси през 1995 и 2015 се виждат под ъгъл 90° . Това означава, че той лежи на окръжността по картата, чийто диаметър е образуван крайните положения на полюсите.

Пресичаме двете окръжности и получаваме две възможни точки за шамана. Но обръщайки внимание на местата по земята, където се е наблюдавало пръстеновидно затъмнение, остава само един вариант – по източната точка **W**.

д) Виждаме от пътя на затъмнението, че в точката на шамана **W** то се наблюдава в 10:45 UT. Също измерваме, че дължината на **W** е -77° . В часова мярка това е $5^h 8^m$. За местното време остава да вземем разликата. Резултатът е $5^h 37^m$.



е) Близко до земната повърхност лунната сянка може да се приеме за цилиндър в пространството. Формата на пресичането ѝ с хоризонта ще бъде елипса (тъй като цилиндърът е частен случай на конус). Параметрите на тази елипса могат да бъдат намерени от чертежа. Голямата полуос a се получава от малката ос b (радиус на цилиндъра), проектирана под ъгъл h , равен на височината на Луната и Слънцето над хоризонта. Връзката между тях ще е $\sin h = b/a$.



Близко до мястото на шамана измерваме по пътя на затъмнението $b/a = 0.385$, откъдето $h = 22^\circ$. За азимута използваме, че голямата ос на елипсата сочи по направление към Слънцето и Луната. При мястото на шамана това направление е приблизително изток. Астрономическият азимут на точката изток е $A = 270^\circ$. Реалните стойности са $h = 22^\circ$ и $A = 261^\circ$.

ж) Виждаме, че следата на пръстеновидното затъмнение минава и през северния полюс. Аналогично за него може да намерим, че височината на Слънцето над хоризонта отново е около 22° . Това е близо до лятното слънцестоене и месецът трябва да е **юни**. Реалната дата е 10 юни.

Друг подход е да използваме терминатора по фигурата на затъмнението. За всяка от точките по терминатора направлението към Слънцето е перпендикулярно на терминатора. Да

отбележим точката от терминатора, където това направление е на север. Това е точката, където долната кулминация на Слънцето е на север, тоест там географската ширина е 90° минус слънчевата деклинация. Но тази точка по фигурата не изглежда да е на повече от $67^\circ - 68^\circ$ ширина. Деклинацията на Слънцето трябва да е почти 23.5° , което ни насочва към месец ЮНИ.

з) Приемаме, че магнитният полюс се движи по направление PD с някаква променлива скорост $v(t)$. Охлювът тръгва от Alert, когато магнитният полюс е в P . Отсечката от него към P е перпендикулярна на PD . Дължината ѝ е $l = 730$ km.

Избираме координатна система, в която P е нулата, оста x е по PD , а охлювът стартира от $(0, -l)$. Разстоянието охлюв-полюс ще бележим с $r(t)$.

Скоростта на охлюва в посока по свързващата отсечка $r(t)$ е цялото v , а тази на полюса в посока по нея е $v \cos \alpha$, където α е ъгълът, сключен от свързващата отсечка с хоризонта. Записваме уравнението за промяна на разстоянието $r(t)$:

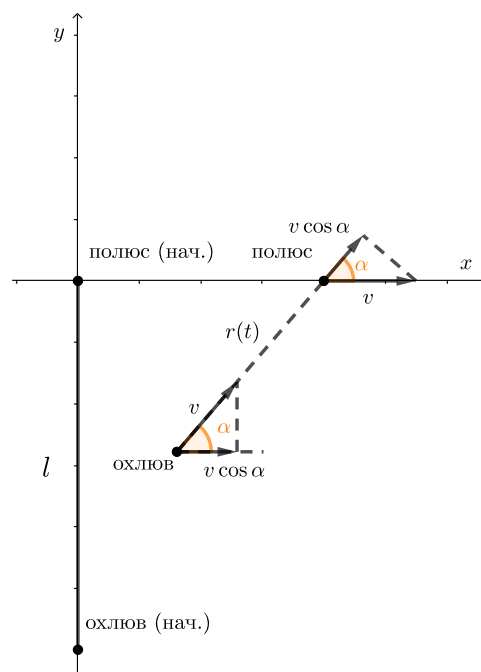
$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = v \cos \alpha - v.$$

Видно е, че уравнението за промяна на хоризонталното отстояние $x(t)$ трябва да изглежда по сходен начин. Разглеждайки проекциите на скоростите по x за полюса и охлюва, получаваме

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v - v \cos \alpha.$$

Правим извод, че във всеки момент, независимо от v , промените в r и x са противоположни по големина. Това означава, че $r + x$ се запазва.

В началото на движението $r = l$, а $x = 0$, тоест винаги $r + x = l$. След много дълго време, когато охлювът е максимално близо до полюса, той ще се е движи почти изцяло по x – все пак скоростта му винаги има компонента нагоре по y , която го тласка към $y = 0$. Това означава, че след много дълго време $l_{\min} = r = x$. Така $l_{\min} = l/2 = \boxed{365 \text{ km}}$.

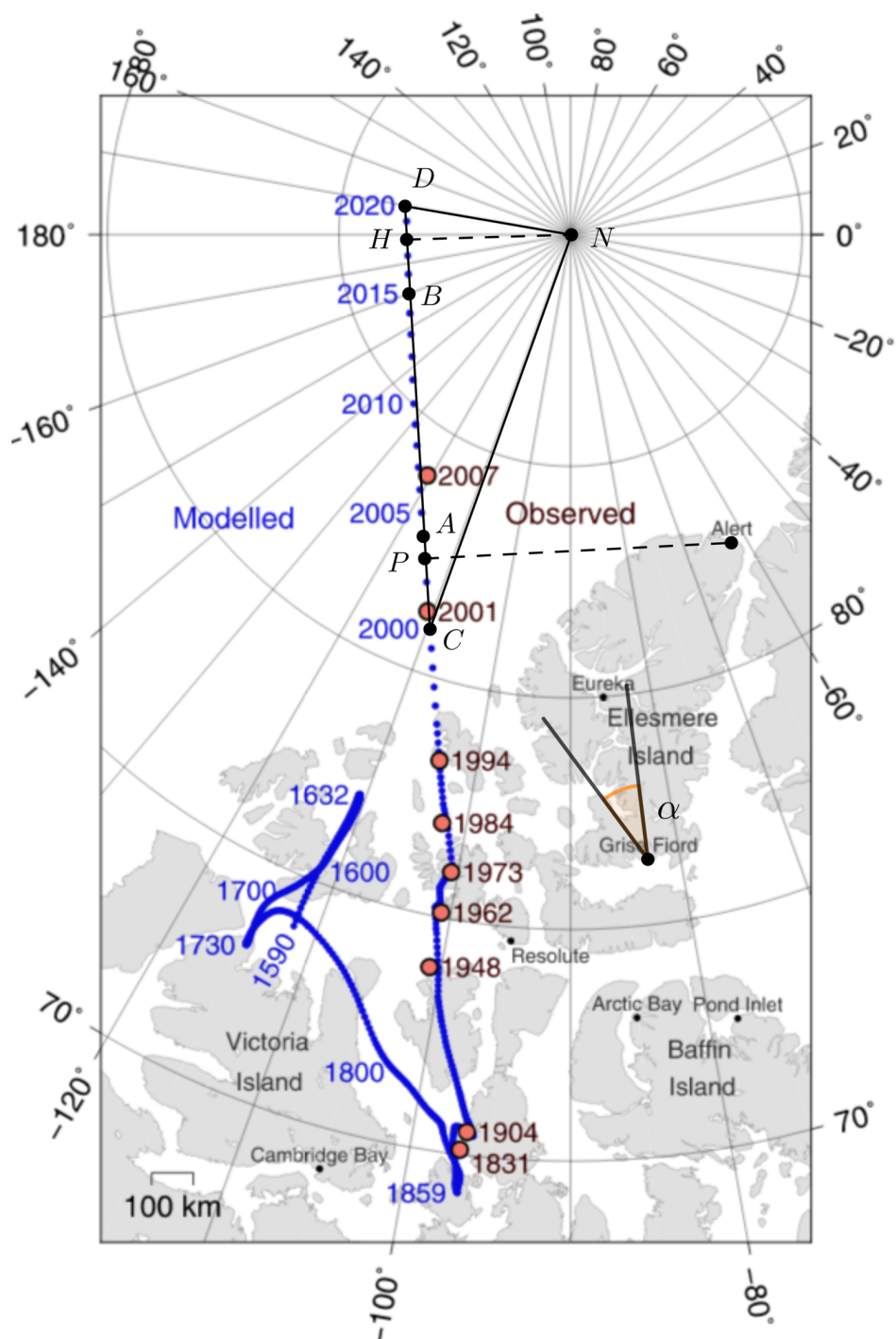


Стефан Иванов

Критерии за оценяване (общо 20 т.):

- | | |
|--|--------|
| – За разбиране къде скоростта е максимална | 1 т. |
| – За верен резултат | 1 т. |
| – За формата на зоната | 1 т. |
| – За вярно намиране на частта от земната повърхност | 1 т. |
| – За разбиране, че само част от движението е към географския север | 1 т. |
| – За верен резултат | 1 т. |
| – За намиране на ширината | 0.5 т. |
| – За нанасяне на паралела | 0.5 т. |
| – За описаната окръжност | 1 т. |
| – За отхвърляне на случая без затъмнение и нанасяне на W | 1 т. |
| – За намиране на дължината | 0.5 т. |
| – За намиране на универсалното време | 0.5 т. |

- За пресмятане на местното слънчево време 1 т.
- За намиране на височината по сянката (в рамките на точността) 2 т.
- За намиране на азимута (в рамките на точността) 1 т.
- За правилен подход при намиране на месеца 1 т.
- За отговор около лятното слънцестоене (юни/юли). 1 т.
- За полезен избор на координатна система 1 т.
- За уравнения за движение 1 т.
- За разпознаване на инварианта 1 т.
- За съображения относно началния момент и граничния случай; за краен резултат 1 т.



Задача 2. Повърхностна фотометрия на NGC 7217. Повърхностната фотометрия на галактики е астрономически метод, чрез който се изследва разпределението на светлината в различните части на галактиките. Получените данни могат да се използват за анализиране разпределението на светещата маса, изчисляване на геометрични параметри на галактиката, както и изследване на цялостната ѝ структура.

При протяжни обекти се дефинира величината *повърхностна яркост* μ , която се измерва в звездни величини на квадратни дъгови секунди [$\text{mag}/\text{arcsec}^2$]. В сила е следната връзка между μ и интензитета I [$(\text{W}/\text{m}^2)/\text{arcsec}^2$] в дадена точка:

$$\mu = \mu_0 + 2.5 \lg \left(\frac{I_0}{I} \right),$$

където μ_0 и I_0 са калибровъчни константи. Законите, които описват $I(R)$, където R е разстоянието от центъра на галактиката, са различни за двете компоненти на спирална галактика – балджа и дискът. За балджа е в сила законът на Де Вокулър

$$\lg \left(\frac{I}{I_e} \right) = -3.331 \left[\left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/4} - 1 \right], \quad \text{еквивалентно на} \quad \mu(R) = \mu_{0,\text{bulge}} + 8.327 \left[\left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/4} - 1 \right],$$

където I_e , R_e и $\mu_{0,\text{bulge}}$ са неизвестни параметри на галактиката за балджа. За диска на галактиката е в сила друг експоненциален закон

$$I = I_0 e^{-R/h}, \quad \text{еквивалентно на} \quad \mu(R) = \mu_{0,\text{disk}} + 1.086 \left(\frac{R}{h} \right),$$

където I_0 и $\mu_{0,\text{disk}}$ са неизвестни параметри на галактиката за диска.

Разполагате с таблица с истински наблюдателни данни, получени за спиралната галактика NGC 7217 в съзвездие Пегас. В таблицата са представени повърхностите яркости μ в [$\text{mag}/\text{arcsec}^2$] спрямо разстоянията R от центъра на галактиката в парсеци [pc].

- а) Начертайте графика на зависимостта $\mu(R)$ по данните от таблицата и от нея оценете радиуса на балджа R_b . [5 т.]

Приемете, че яркостта на NGC 7217 се описва добре от закона на Де Вокулър за балджа и от експоненциалния закон на диска.

- б) Начертайте отделна графика на зависимостта само за балджа в подходящи променливи. От нея определете параметрите R_e и $\mu_{0,\text{bulge}}$. [5 т.]

Указание: Намерете помощни променливи x и y , зависещи съответно от R и μ , за които законът на Де Вокулър предвижда, че зависимостта $y(x)$ е линейна. Ако начертаете графика в такива променливи, точките ви би трябвало да се разполагат на права линия, чийто наклон ще е свързан с търсените в задачата параметри.

- в) Начертайте отделна графика на зависимостта само за диска в подходящи променливи. От нея определете параметрите h и $\mu_{0,\text{disk}}$. [5 т.]

За I_0 и I_e може да използвате експериментално установените формули

$$\begin{aligned} \lg(I_0[\text{W}/\text{m}^2]) &= 14.50^{\text{m}}/\text{arcsec}^2 - \mu_{0,\text{disk}}, \\ \lg(I_e[\text{W}/\text{m}^2]) &= 15.94^{\text{m}}/\text{arcsec}^2 - \mu_{0,\text{bulge}}. \end{aligned}$$

- г) Пресметнете I_0 и I_e . [1 т.]

Пълната светимост L на галактиката е сума от светимостите на диска и балджа и се задава с формулата

$$L = 2\pi(3.607I_e R_e^2 + I_0 h^2).$$

- д) Пресметнете L за NGC 7217. [1 т.]

На Фигура 3 е дадена графика на ротационните скорости v на звезди от галактиката при различни разстояния от центъра R .

- е) Използвайте графиката, за да определите масата на галактиката M . Така определете отношението M/L (mass-to-light ratio) в мерни единици $[M_{\odot}/L_{\odot}]$. **[3 т.]**

R [pc]	μ [mag/arcsec ²]	R [pc]	μ [mag/arcsec ²]	R [pc]	μ [mag/arcsec ²]
11174	22.84	4761	20.84	777	18.32
10591	22.71	4178	20.64	583	17.96
10008	22.74	3595	20.54	388	17.52
9425	22.30	3012	20.10		
8842	22.30	2429	19.82		
8259	22.03	1943	19.57		
7676	21.80	1749	19.43		
7093	21.64	1554	19.28		
6510	21.55	1360	19.07		
5927	21.40	1166	18.85		
5344	21.17	971	18.60		

Таблица 1

Справочни данни:

Маса на Слънцето

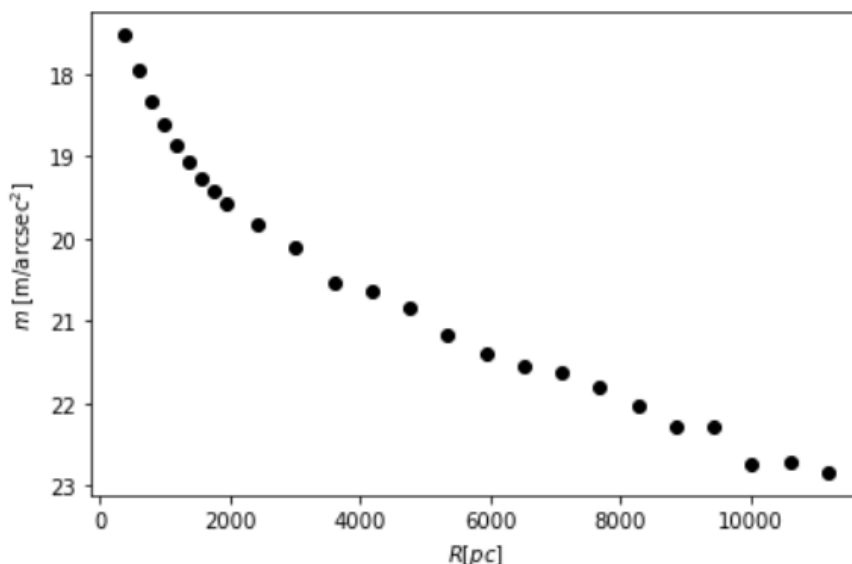
$$M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Светимост на Слънцето

$$L_{\odot} = 3.86 \times 10^{26} \text{ W}$$

Решение.

- а) Нанасяме данните от таблицата на графика за $\mu(R)$.

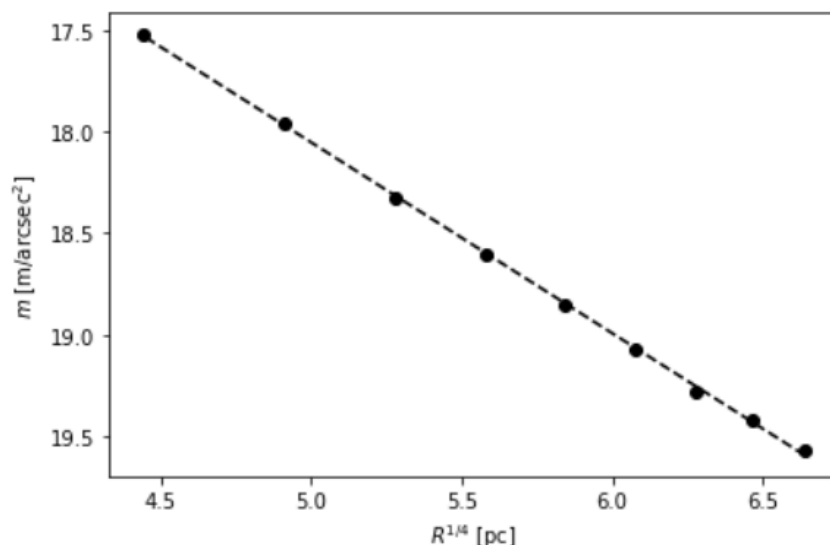


Обръщаме внимание графиката да се разполага върху достатъчно голяма площ, осите да са оразмерени и мащабът да е избран добре. От определено разстояние R нататък по графиката ще се вижда ясно изразена линейна зависимост, която съответства на диска на галактиката. Така определяме

$$R_{\text{bulge}} = (2200 \pm 400) \text{ pc}.$$

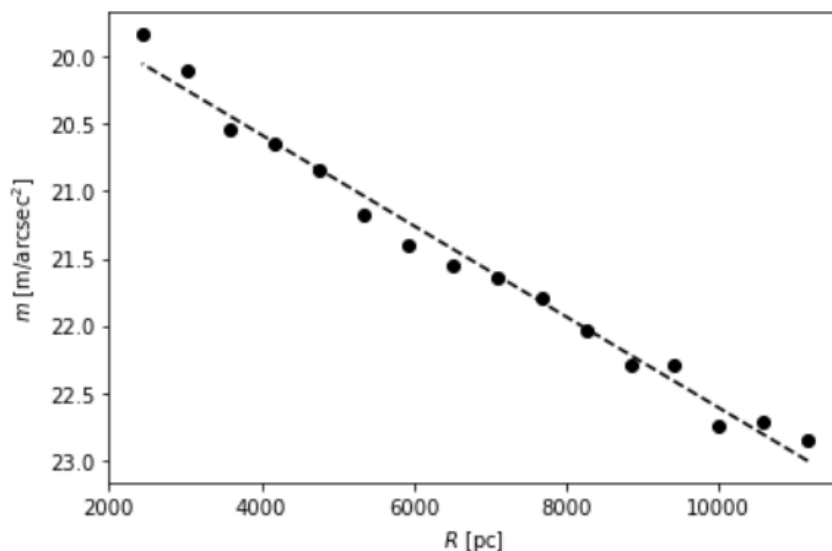
б) След като имаме радиуса на балджа, разпределяме данните на две части. За балджа имаме общо 9 точки. Ако изберем да чертаем $y = \mu$ спрямо $x = R^{1/4}$, законът на Де Вокульор предвижда зависимост от вида $y = ax + b$, където $a = \frac{8.327}{R_e^{1/4}}$ и $b = \mu_{0,\text{bulge}} - 8.327$.

Начертаваме графиката и прекарваме най-добрата права през точките. Измерваме наклона ѝ и получаваме $a = 0.94 \text{ pc}^{-1/4}$, а от точката на пресичане с оста y взимаме $b = 13.34 \text{ mag/arcsec}^2$.



В резултат $\mu_{0,\text{bulge}} = \boxed{21.67 \text{ mag/arcsec}^2}$ и $R_e = \boxed{6130 \text{ pc}}$.

в) За диска изборът на променливи е просто $y = \mu$ и $x = R$, при което очакваме $a = \frac{1.086}{h}$ и $b = \mu_{0,\text{disk}}$. Начертаваме графиката:



От нея намираме $\mu_{0,\text{disk}} = \boxed{19.23 \text{ mag/arcsec}^2}$ и $h = \boxed{3210 \text{ pc}}$.

г) Пресмятаме I_e и I_0 :

$$I_e = \boxed{1.89 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2} \quad \text{и} \quad I_0 = \boxed{1.80 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2}.$$

д) По дадената формула намираме:

$$L = \boxed{2.66 \times 10^{36} \text{ W}}.$$

е) Определяме, че на разстояние $R = 10$ крс скоростта е $v = 250$ km/s. С това получаваме масата M :

$$M = \frac{v^2 R}{G} \approx 2.90 \times 10^{41} \text{ kg} \approx \boxed{1.5 \times 10^{11} M_{\odot}}.$$

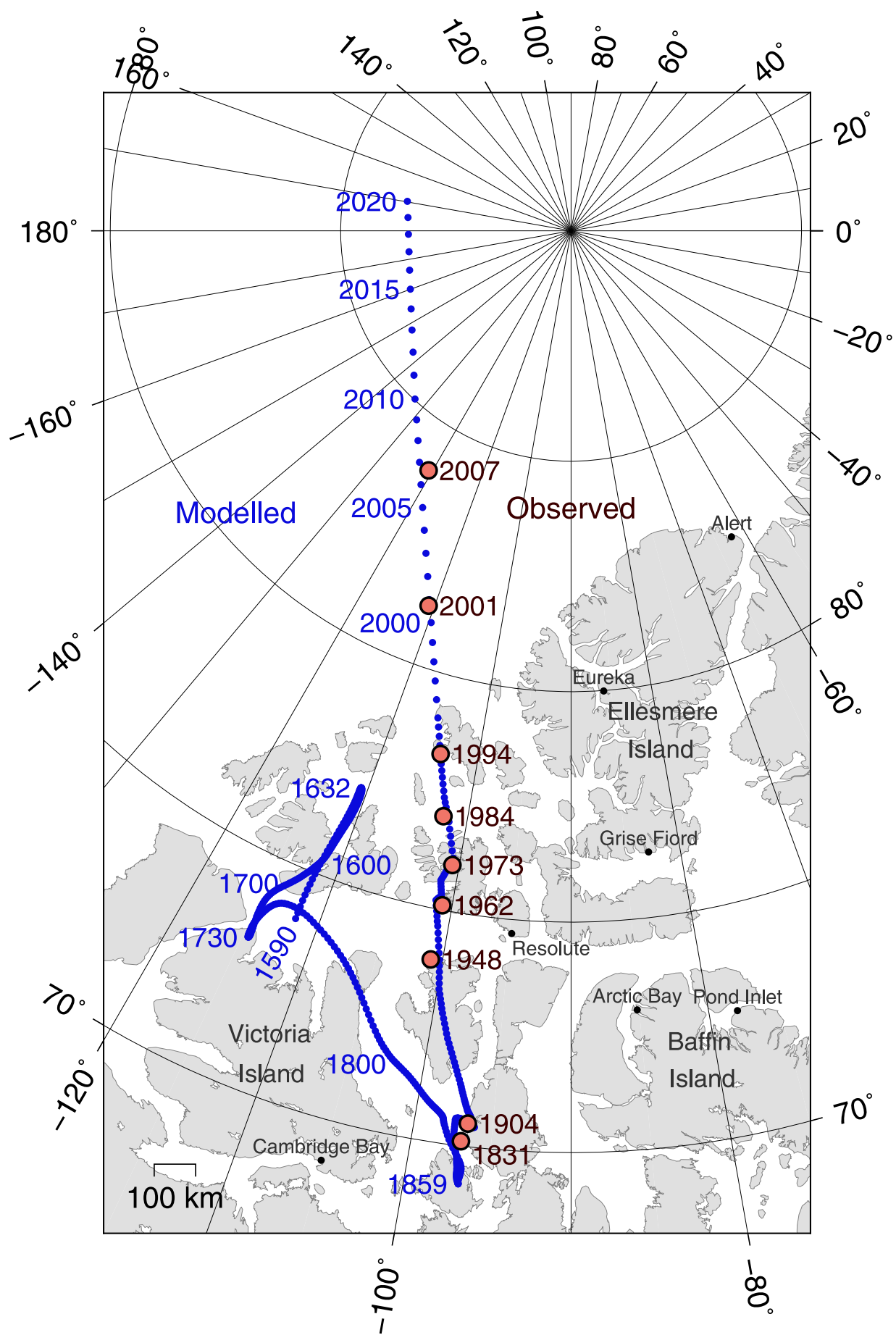
Съответно отношението M/L е около $\boxed{20 M_{\odot}/L_{\odot}}$.

Иван Попов

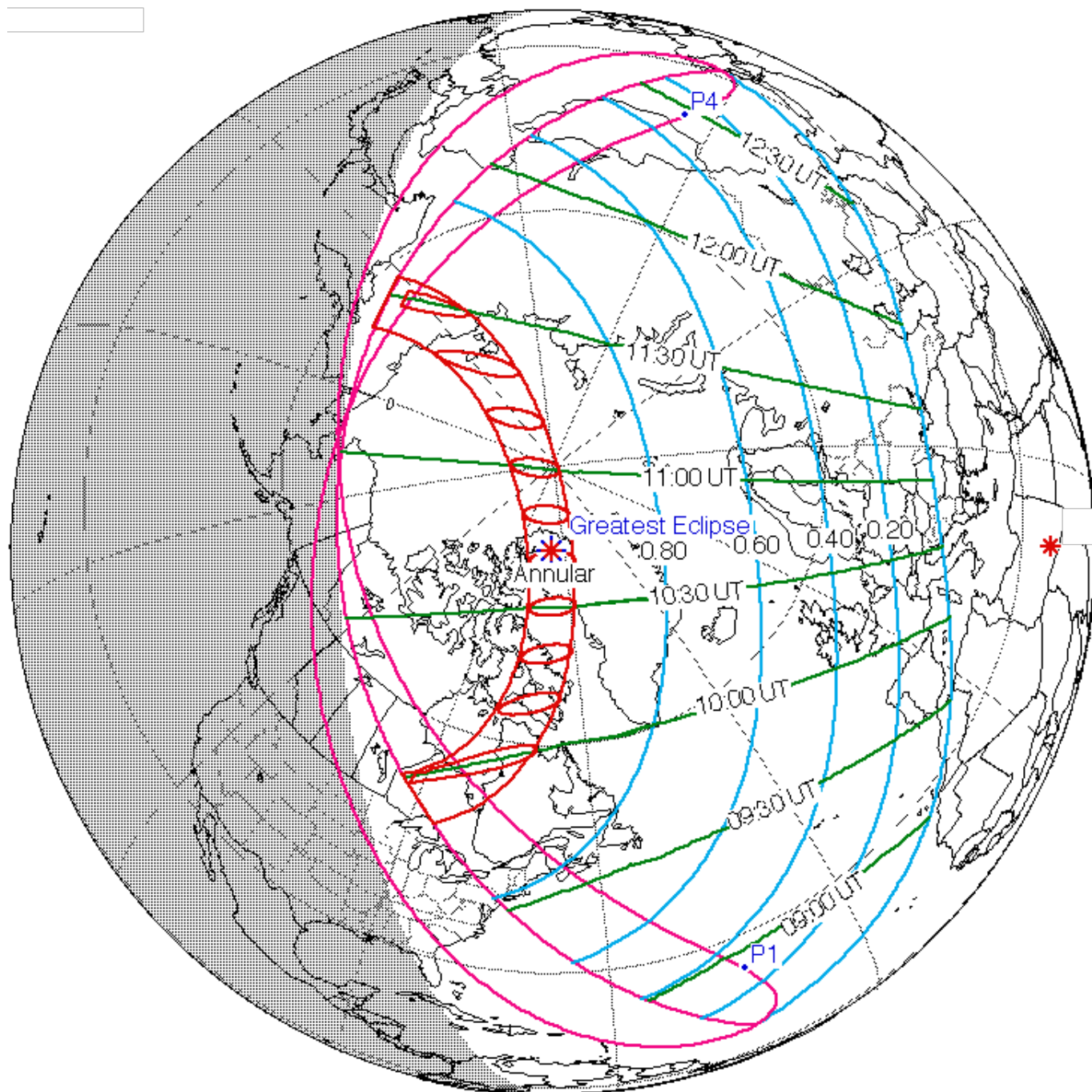
Критерии за оценяване (общо 20 т.):

– За добре изпълнена графика	4 т.
– За оценка за радиуса на балджа	1 т.
– За начертаване на графика за балджа	1 т.
– За правилно избрани оси, при които зависимостта е линейна	2 т.
– За стойност на R_e	1 т.
– За стойност на $\mu_{0,\text{bulge}}$	1 т.
– За начертаване на графика за диска	2 т.
– За правилно избрани оси, при които зависимостта е линейна	1 т.
– За стойност на h	1 т.
– За стойност на $\mu_{0,\text{disk}}$	1 т.
– За стойност на I_0	0.5 т.
– За стойност на I_e	0.5 т.
– За стойност на L	1 т.
– За намиране на M	2.5 т.
– За пресмятане на M/L	0.5 т.

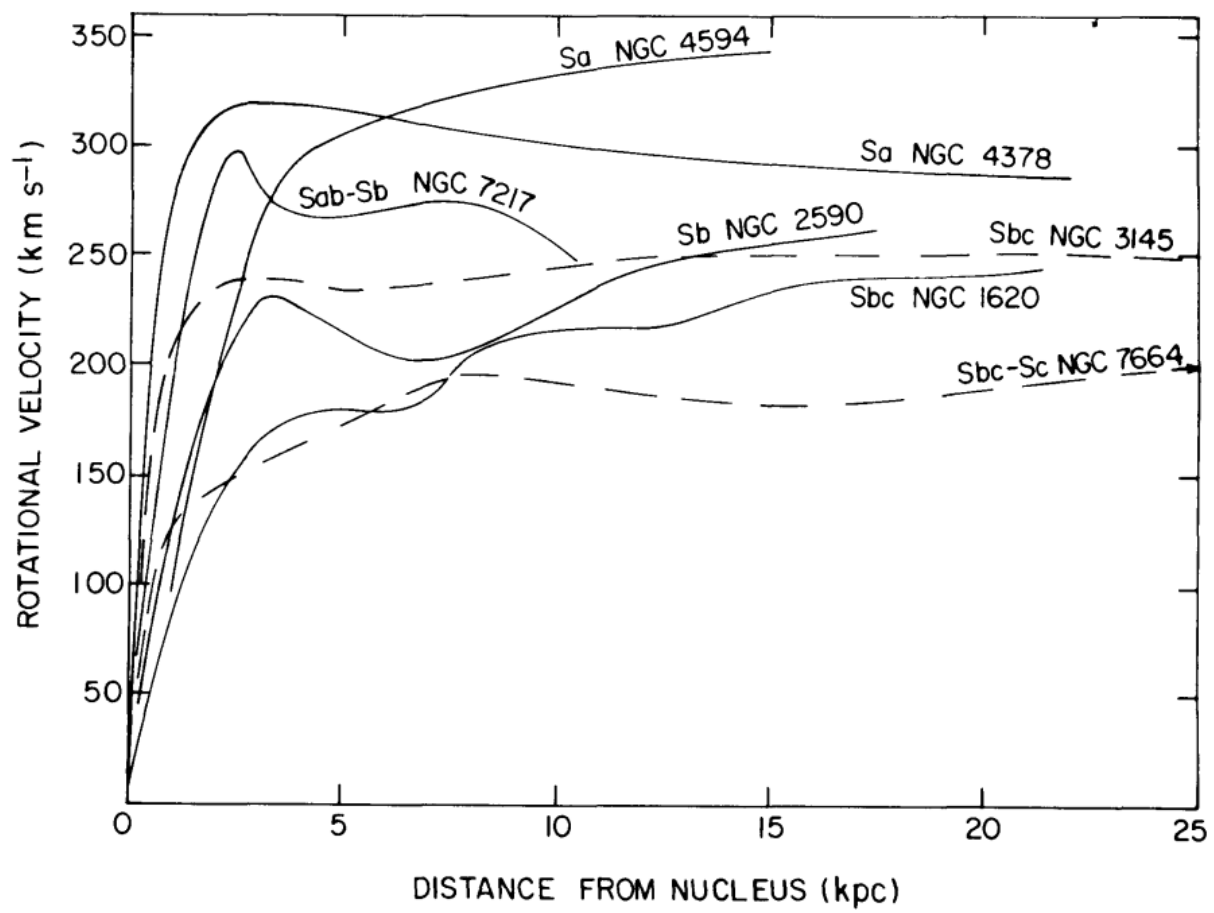
Редакция на темата: Стефан Иванов



Фигура 1



Фигура 2



Фигура 3