

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ
XXIX НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
<https://astro-olymp.org>

Общински кръг, 2025-2026 г.
Възрастова група 11-12 клас

Задача 1. Делтапланер над Бургас. Сашо и Наско са на плажа в Бургас. В момента, в който Слънцето е на максимална височина над хоризонта, делтапланер преминава точно над Сашо. В същия момент Наско вижда същия делтапланер да преминава централно пред видимия диск на Слънцето. Делтапланерът се движи хоризонтално, в посока север, на височина 123 метра над морското равнище. Географските координати на Бургас са $42,5^{\circ}\text{N}$, $27,5^{\circ}\text{E}$.

А) Колко метра е разстоянието между Сашо и Наско, ако датата е 21 юни? **[4т.]**

Б) В кое съзвездие е делтапланерът за Сашо, ако датата е 21 юни? **[2т.]**

В) Коя е датата, ако ъгловата скорост на делтапланера, наблюдавана от Сашо, е точно три пъти по-голяма от ъгловата скорост, наблюдавана от Наско? **[4т.]**

Може да пренебрегнете височините на Сашо и Наско.

Решение:

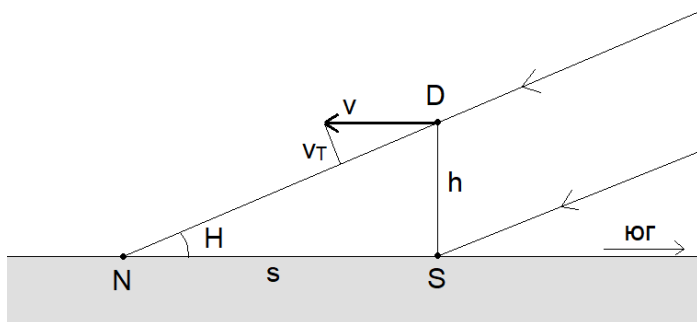
А) Слънцето е на максимална височина над хоризонта за Бургас, т.е. е над точката юг. Наско вижда делтапланера в тази посока, директно над Сашо, т.е. е право на север от Сашо. Делтапланерът се движи на север, успоредно на отсечката Сашо – Наско и на височина $h = 123$ метра над нея (Сашо и Наско са на плажа, т.е. на морското равнище).

Географската ширина е $\varphi = +42,5^{\circ}$. Най-високата точка от небесния екватор, гледано от Бургас, е на височина $90^{\circ} - \varphi = 47,5^{\circ}$. Ако датата е 21 юни, деклинацията на Слънцето е $+23,43^{\circ}$, т.е. Слънцето е на такова ъглово разстояние над най-високата точка от небесния екватор, на височина $H = 47,5^{\circ} + 23,43^{\circ} = 70,93^{\circ}$ над хоризонта. Разстоянието между Сашо и Наско е

$$s = \frac{h}{\text{tg}(H)} = 42,5 \text{ m}$$

[4т.]

Б) Делтапланерът е в зенита за Сашо, а Слънцето е в горна кулминация. Ректасцензията на зенита ще бъде равна на ректасцензията на Слънцето, която на 21 юни е 6^{h} . Деклинацията на зенита е равна на географската ширина, която е $+42,5^{\circ}$. Точката с екваториални координати $\alpha = 6^{\text{h}}$, $\delta = +42,5^{\circ}$ е в средата на съзвездието Колар (Auriga), недалече от звездата Менкалинан. **[2т.]**



В) Ъгловата скорост е равна на тангенциалната скорост, разделена на разстоянието

$$\omega = \frac{v_T}{r}$$

Делтапланерът се движи със скорост v , перпендикулярно на направлението към Сашо, т.е. изцяло тангенциално за Сашо. Разстоянието от Сашо е $SD = h$, т.е. ъгловата скорост на делтапланера, гледано от Сашо е

$$\omega_1 = \frac{v}{h}$$

Тангенциалната скорост на делтапланера, гледано от Наско е $v_T = v \sin(H)$. Разстоянието на делтапланера от Наско е $ND = h/\sin(H)$. Ъгловата скорост на делтапланера, гледано от Наско ще бъде

$$\omega_2 = \frac{v \sin(H)}{h/\sin(H)} = \frac{v}{h} \sin^2(H)$$

Тъй като

$$\omega_1 = 3\omega_2$$

получаваме

$$\begin{aligned} \sin^2(H) &= 1/3 \\ H &= \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 35,26^\circ \end{aligned}$$

Най-високата точка от небесния екватор е на височина $90^\circ - \varphi = 47,5^\circ$, т.е. деклинацията на Слънцето ще е $\delta = 35,26^\circ - 47,5^\circ = -12,24^\circ$. Ако разстоянието по еклиптиката от Слънцето до най-близкото равноденствие е x , то

$$\sin(x) = \sin|\delta| / \sin(\varepsilon)$$

Тук $\varepsilon = 23,43^\circ$ е ъгълът между еклиптиката и небесния екватор. Получаваме $x = 32,2^\circ$. При равномерно движение на Слънцето по еклиптиката това разстояние се изминава за около 33 дни. Тъй като деклинацията е отрицателна, възможните дати са 33 дни преди пролетното равноденствие и 33 дни след есенното равноденствие, т.е. 15 февруари или 25 октомври. **[4т.]**

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

А) За пресмятане на разстоянието между наблюдателите – 4 т.

Б) За посочване на правилното съзвездие и съображения – 2 т.

В) 4 т.

За пресмятане на височината на Слънцето – 2 т.

За получаване на датата – 2 т.

Задача 2. Дати на затъмненията. В следната Интернет страница можете да намерите подробна информация за всички слънчеви и лунни затъмнения, които са се наблюдавали и ще се наблюдават от Земята в близките няколко хилядолетия: <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/>. Отворете секцията, в която се публикува информация за слънчеви затъмнения: <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/solar.html>. Ако се загледате внимателно в датите, на които такива затъмнения се наблюдават, може да забележите, че почти във всички случаи, в които на дадена дата има слънчево затъмнение, след точно 19 години такова затъмнение отново се наблюдава (макар и не от същите места по Земята).

Пример: на 1 юни 2011г. от източните части на Азия, Северна Америка и изобщо северните полярни области се е виждало частично слънчево затъмнение, а на 1 юни 2030 г. от Европа, Африка и източна Азия ще се наблюдава пръстеновидно затъмнение.

А) Как се нарича този период, през който затъмненията се наблюдават на повтарящи се дати? [2т.]

Б) Защо неговата продължителност е почти точно равна на 19 години? Обяснете подробно отговора си. [6т.]

В) При затъмненията се наблюдава и един друг цикъл, който се нарича сарос. Каква е неговата продължителност? Обяснете какъв е неговият смисъл. [2т.]

Решение:

А) Споменатият в задачата период се нарича метоничен (или Метонов) цикъл.

Б) Нека да направим количествена обосновка за продължителността на метоничния цикъл. Тя е равна на 235 синодични лунни месеца (T_{SYN}).

Тъй като $T_{\text{SYN}} = 29\text{d } 12\text{h } 44\text{m } 3\text{s}$, то $235T_{\text{SYN}} = 19\text{yr } 2\text{h } 4\text{m}$ или съвсем малко повече от точно 19 тропични години (на които е базиран съвременният календар). Това означава, че на две дати, между които интервалът от време е точно 19 години, Луната е в една и съща фаза.

Тук също е важно да са отбележи, че продължителността на една драконична година (или интервалът от време между две последователни видими преминавания на Слънцето през един и същи възел на лунната орбита) е $346\text{d } 14\text{h } 52\text{m } 54\text{s}$. Лесно можем да получим, че метоничният цикъл е почти точно 20 пъти по-дълъг от драконичната година (по-точно 20,02 пъти. Оттук следва, че през въпросния интервал от време, който е почти точно равен на 19 години, не просто Луната е в една и съща фаза, но и Слънцето е в едно и също видимо положение спрямо възлите на нейната орбита. Това е причината през такъв период да се наблюдават слънчеви и лунни затъмнения.

В древността метоничният цикъл е бил използван за предсказване на дати на слънчеви и лунни затъмнения.

В) Продължителността на сароса е 18 години 11 денонощия 8 часа, като с много голяма точност тя е равна на най-малкото общо кратно на синодичния, драконичния и аномалистичния лунни месеци (в един сарос се съдържат 223 синодични месеца, 242 драконични месеца и 239 аномалистични месеца). По тази причина, това е най-краткият период, през който се повтаря много точно една и съща взаимна геометрична подредба на Земята, Луната и Слънцето. Затова и през този период от време се повтарят аналогични условия за наблюдения на слънчеви и лунни затъмнения.

Тъй като в сароса не се съдържа цяло число денонощия, затъмненията, които отстоят на точно един сарос във времето не се наблюдават от едни и същи места по Земята.

При решаването на тази задача се очаква учениците да намерят самостоятелно продължителностите на използваните в решението месеци и на тропичната година. Възможно е в различните източници на информация да са посочени съвсем слабо различаващи се стойности, поради което резултатите от пресмятанията в решенията да са различни от получените в авторското решение. Ако са налице такива разлики, но решението на ученика е логически правилно, не би следвало да се отнемат точки.

Критерии за оценяване (общо 10т.)

А) За правилно назоваване на името на метоничния (Метоновия) цикъл – 2т.

Б) За правилна и добре обяснена количествена обосновка защо продължителността на метоничния цикъл е много близка до 19 години – 6т.

В) 2 т.

За правилно посочване на продължителността на сароса – 1т.

За обяснение на смисъла на сароса – 1т.

Задача 3. Екзопланета с ексцентрична орбита. Екзопланета обикаля около звезда с маса 0,73 слънчеви маси, радиус 0,66 слънчеви радиуса и фотосферна температура 4700 К по орбита с период 87 години и ексцентрицитет 0,44.

А) Какво минимално разстояние до звездата, в аи, достига екзопланетата? [3т.]

Б) Каква е минималната скорост на екзопланетата по орбитата ѝ? [2т.]

В) Колко пъти по-слаба е звездата по небето на екзопланетата спрямо Слънцето по земното небе? Отговорете за апоастрий, когато звездата е най-далече от планетата. [3т.]

Г) Каква е минималната лъчева (радиална) скорост на звездата спрямо планетата? [2т.]

Решение:

А) Намираме голямата полуос на планетната орбита като прилагаме III Закон на Кеплер с размерности аи, уг и $M_{\odot}$:

$$\frac{a^3}{T^2} = M$$

Получаваме голяма полуос $a = (0,73 \cdot 87^2)^{1/3} \text{ аи} = 17,68 \text{ аи}$.

Използваме ексцентрицитета на планетната орбита $e = 0,44$, за да пресметнем разстоянието в периастрий (минималното разстояние):

$$r_p = a(1 - e) = 9,9 \text{ аи}$$

[3т.]

Б) Скоростта на планетата на разстояние a от звездата е

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{a}} = 6,05 \text{ km/s}$$

Скоростта на екзопланетата по орбитата ѝ е минимална в апоастрий:

$$v_A = v_0 \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} = 3,77 \text{ km/s}$$

[2т.]

В) Пресмятаме светимостта на звездата по закона на Стефан-Болцман като сравняваме със Слънцето

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4 = (0,66)^2 \left(\frac{4700}{5770}\right)^4 = 0,192$$

Разстоянието планета-звезда в апоастрий е

$$r_A = a(1 + e) = 25,46 \text{ au}$$

Лъчистият поток, който звезда със светимост L създава на разстояние r на единица площ, перпендикулярна на лъчите е

$$\Phi = \frac{L}{4\pi r^2}$$

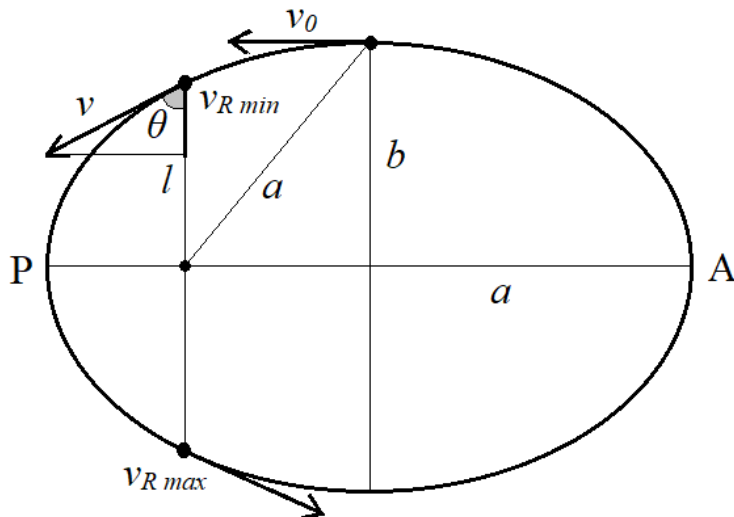
Сравнявайки потока, който Слънцето създава на Земята с този, който звездата създава на планетата, получаваме

$$\frac{\Phi_{\odot}}{\Phi} = \left(\frac{L_{\odot}}{L}\right) \left(\frac{r_A}{1\text{au}}\right)^2 = 3380$$

Звездата в апоастрий е около 3400 пъти по-слаба, гледано от планетата, спрямо Слънцето на земното небе.

[Зт.]

Г)



І начин: Може да знаете наизуст, че минимумът и максимумът на радиалната скорост се достигат в двете точки, в които орбитата на планетата пресича т. нар. фокална хорда – хордата към елипсата, която минава през звездата и е перпендикулярна на голямата ос. Размерът на фокалната полухорда (половината на фокалната хорда) е

$$l = a(1 - e^2)$$

От закона за запазване на енергията (ЗЗЕ) имаме

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} = v_0 \sqrt{\left(\frac{2a}{r} - 1 \right)}$$

Замествайки за фокалната полухорда получаваме орбитална скорост

$$v = v_0 \sqrt{\left(\frac{2a}{a(1 - e^2)} - 1 \right)} = v_0 \sqrt{\frac{1 + e^2}{1 - e^2}}$$

Според закона за запазване на момента на импулса (ЗЗМЕ) изразът $vr \sin\theta = \text{const}$ във всяка точка по орбитата, където θ е ъгълът между направлението звезда-планета и вектора на скоростта на планетата v . Тъй като в едната пресечна точка на малката ос с орбитата планетата е на разстояние a от звездата, в тази точка $\sin\theta = b/a = (1-e^2)^{1/2}$. Следователно, за всяка точка по орбитата важи

$$vr \sin(\theta) = v_0 a \sqrt{1 - e^2}$$

Замествайки за фокалната полухорда получаваме

$$\begin{aligned} va(1 - e^2) \sin(\theta) &= v_0 a \sqrt{1 - e^2} \\ v \sqrt{(1 - e^2) \sin(\theta)} &= v_0 \end{aligned}$$

Замествайки изрази за орбиталната скорост, получаваме

$$\begin{aligned} v_0 \sqrt{\frac{1 + e^2}{1 - e^2}} \sqrt{1 - e^2} \sin(\theta) &= v_0 \\ \sin(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{1 + e^2}} \end{aligned}$$

Повдигаме на квадрат

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta) &= \frac{1}{1 + e^2} \\ \cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta) &= 1 - \frac{1}{1 + e^2} = \frac{e^2}{1 + e^2} \\ \cos(\theta) &= \pm \frac{e}{\sqrt{1 + e^2}} \end{aligned}$$

Радиалната скорост на планетата спрямо звездата е

$$v_R = -v \cos(\theta)$$

Замествайки за фокалната полухорда получаваме израз за минималната радиална скорост:

$$v_R = -v_0 \sqrt{\frac{1 + e^2}{1 - e^2}} \left(\frac{e}{\sqrt{1 + e^2}} \right) = -v_0 \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Заместваем с $v_0 = 6,05 \text{ km/s}$ и $e = 0,44$ и получаваме $v_R = -2,96 \text{ km/s}$.

[2т.]

II начин:

Използвайки горните формули, можем да изведем сами, че минимумът и максимумът на радиалната скорост са на фокалната хорда.

Ако радиалната скорост има минимална или максимална стойност, то максимална стойност ще има квадратът ѝ:

$$v_R^2 = v^2 \cos^2(\theta) = v^2 (1 - \sin^2(\theta))$$

Заместваем тук изрази от ЗЗМЕ

$$\sin^2(\theta) = \left(\frac{v_0 a}{vr} \right)^2 (1 - e^2)$$

Получаваме

$$v_R^2 = v^2 \left(1 - \left(\frac{v_0 a}{vr}\right)^2 (1 - e^2)\right)$$
$$v_R^2 = v^2 - v_0^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 (1 - e^2)$$

Заместваме тук израза от 33Е

$$v^2 = v_0^2 \left(\frac{2a}{r} - 1\right)$$

Получаваме

$$v_R^2 = v_0^2 \left(\frac{2a}{r} - 1\right) - v_0^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 (1 - e^2)$$

Полагаме $u = a/r$

$$\frac{v_R^2}{v_0^2} = 2u - 1 - u^2(1 - e^2)$$

Трябва да максимизираме този израз. Извеждаме точен квадрат:

$$\frac{v_R^2}{v_0^2} = -\left(u\sqrt{1-e^2}\right)^2 + 2u\sqrt{1-e^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2 - 1$$
$$\frac{v_R^2}{v_0^2} = -\left(u\sqrt{1-e^2} - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2 + \frac{1}{1-e^2} - 1$$
$$\frac{v_R^2}{v_0^2} = \frac{e^2}{1-e^2} - \left(u\sqrt{1-e^2} - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2$$

Този израз има максимална стойност, когато стойността в скобите е 0, т.е. когато

$$u\sqrt{1-e^2} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$u = \frac{1}{1-e^2} = \frac{a}{r}$$

$$r = a(1-e^2)$$

Това е размерът на фокалната полухорда l . Когато изразът в скобите е 0, получаваме

$$\frac{v_R^2}{v_0^2} = \frac{e^2}{1-e^2}$$
$$v_R = \pm v_0 \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}$$

Това са минималната и максималната възможна радиална скорост. Заместваме с $v_0 = 6,05 \text{ km/s}$ и $e = 0,44$ и получаваме $v_R = -2,96 \text{ km/s}$.

[2г.]

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

- А) За получаване на минималното разстояние звезда – планета – 3 т.
- Б) За получаване на минималната скорост на планетата по орбитата – 2 т.
- В) За получаване на отношението на потоците – 3 т.
- Г) За получаване на минималната радиална скорост – 2 т.

Задача 4. Сатурн в опозиция. Разполагате със снимка на звездното небе направена от обсерватория разположена на тибетското плато в Китай близо до момента на опозицията на Сатурн през 2025 година. Сатурн е най-яркият обект на снимката, която е дадена в негативен вариант (ярките обекти са тъмни, а тъмното небе е светло), и се намира наляво от центъра на снимката. Той се намира недалеч от еклиптиката и следователно на снимката трябва да са разположени няколко зодиакални съзвездия или части от тях.

А) Потърсете подробна карта на звездното небе и определете кои зодиакални съзвездия или части от съзвездия са разположени на снимката. В кое от тях е най-вероятно да се намира Сатурн? [3т.]

Б) Опитайте да пренесете върху снимката положението на пролетната равноденствена точка. [1т.]

В) Опитайте се да определите датата, на която е направена снимката, с точност 1-2 денонощия. Обяснете Вашите разсъждения. [5т.]

Г) Коя е ярката звезда, разположена под центъра на снимката? В кое съзвездие се намира? [1т.]

Решение:

А) Зодиакалните съзвездия, които се виждат на снимката, са съзвездията Риби (южната част на съзвездието), Водолей, Козирог и източните части на Стрелец. Сатурн се намира в съзвездието Риби, близо до „западната риба“, която представлява венец от седем звезди.

Б) + В) Бихме могли да намерим компютърна карта в текущи координати и просто да пренесем върху снимката положението на пролетната равноденствена точка, както и да намерим информация за момента на опозиция на Сатурн, но тогава задачата губи смисъл. Затова предполагаме, че работим с карта в стандартна епоха и не разполагаме с информация за момента на опозиция на Сатурн.

Определяме положението на Сатурн на подходяща звездна карта и виждаме, че той се намира недалеч от пролетната равноденствена точка. От това следва, че Слънцето е недалеч от есенната равноденствена точка и следователно снимката е направена във втората половина на септември. Звездните карти се чертаят за определени стандартни епохи. Примерно за епоха J2000.0. За да определим положението на пролетната равноденствена точка върху снимката трябва да имаме предвид, че са изминали повече от 25 години от стандартната епоха. Ако, обаче, разполагаме с положението на пролетната равноденствена точка в стандартната епоха и имайки предвид, че тя се премества по еклиптиката в посока запад всяка година с около $50''$ (дъгови секунди), то може да я преместим по еклиптиката на ъглово разстояние $50'' \times 25,8 \approx 0,36^\circ$. За целта, освен положението на пролетната равноденствена точка за епоха J2000.0, трябва да знаем ориентацията на еклиптиката върху снимката. Понеже епохите на картата и снимката са близки, то ориентациите на небесните координати ще са почти успоредни. Намираме координатите на 2 или 3 звезди с близки по стойност ректасцензии. Нека това са, примерно, звездите 70 Peg, θ Psc и κ Psc. Виждаме, че на снимката те са разположени върху една почти вертикална отсечка. Следователно координатната мрежа на екваториалните координати е приблизително успоредна на страните на снимката. В района на пролетната равноденствена точка еклиптиката сключва ъгъл $23,5^\circ$ с небесния екватор. Прекарваме линията на еклиптиката през пролетната равноденствена точка за стандартната епоха, така че в източна посока деклинацията на точките от еклиптиката да нараства. За да пресметнем мащаба, делим разликата в деклинациите на звездите на разстоянието между тях в милиметри. Понеже при прецесията пролетната равноденствена точка се премества по еклиптиката на

запад, то нанасяме върху еклиптиката отсечка с дължина в милиметри, еквивалентна на $0,36^\circ$, в посока запад. Така получаваме положението на пролетната равноденствена точка в текущата епоха, на която отговаря снимката на звездното небе със Сатурн. (Дясното кръгче на снимката с решението).

Опозиция на Сатурн означава, че той има еклиптична дължина различаваща се от тази на Слънцето със 180° . За да определим еклиптичната дължина ние трябва да спуснем от планетата перпендикулярна отсечка към еклиптиката. В случая виждаме, че перпендикулярната отсечка от Сатурн към еклиптиката попада на някакво разстояние от пролетната равноденствена точка. Измерваме това разстояние и виждаме, че то е равно на $1,5^\circ$. Следователно Слънцето се намира на същото разстояние от есенната равноденствена точка. Това ъглово разстояние се изминава от Слънцето за около 1,5 денонощия. Есенното равноденствие се случва на 22 септември. Следователно моментът на опозиция, когато е направена снимката, е приблизително с 1,5 денонощия по-рано от момента на есенното равноденствие, т.е. снимката е направена най-вероятно на 21-ви или 20-ти септември.

Г) Ярката звезда в долния край на снимката е най-ярката звезда от съзвездието Южна Риба – Фомалхаут (α PsA или α Piscis Austrini).

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

А) 3 т.

За посочване на зодиакалните съзвездия, които присъстват на снимката, $4 \times 0.5 \text{ т} = 2 \text{ т}$. За посочване на съзвездието (Риби), в което се намира Сатурн – 1 т.

Б) 1 т.

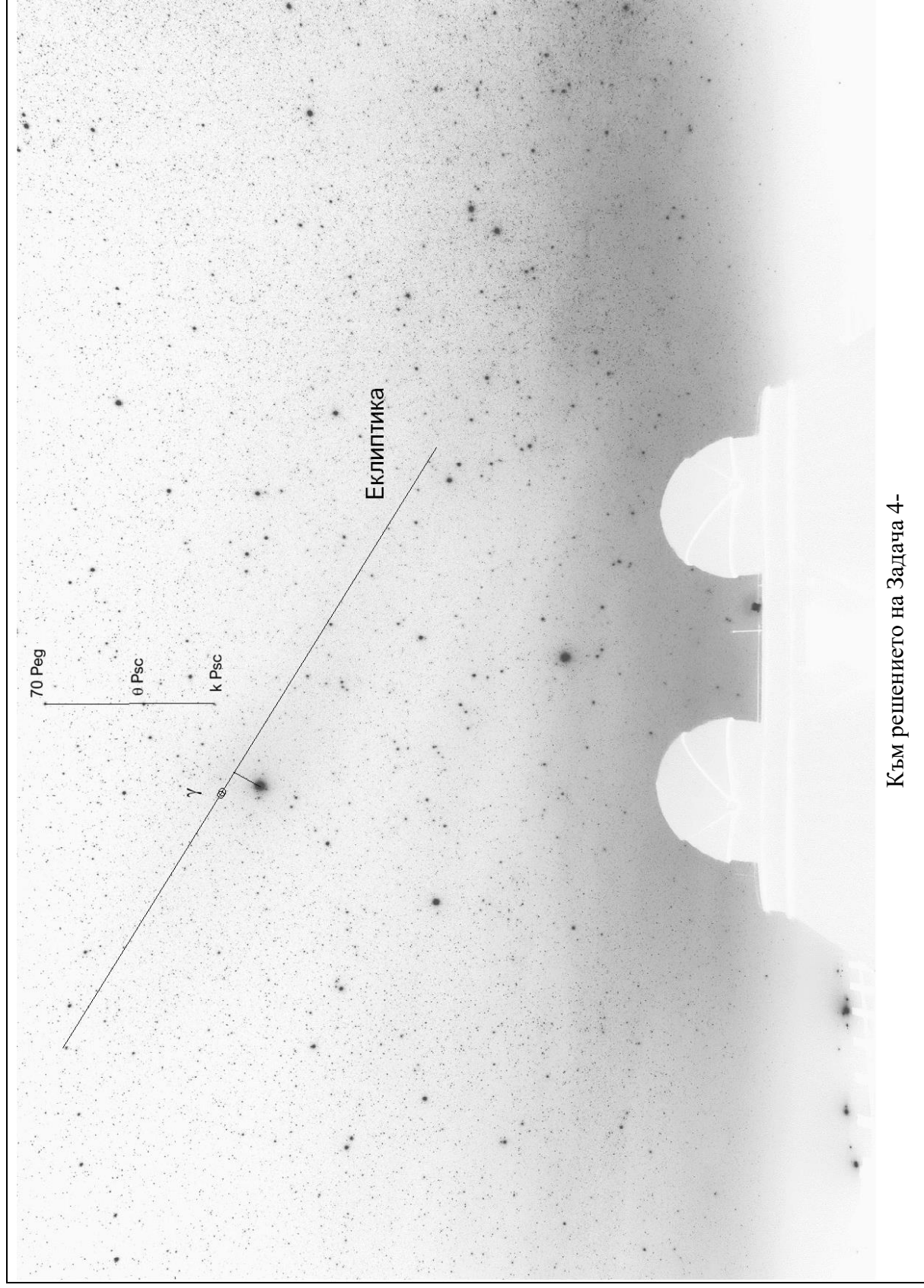
За правилно пренасяне върху снимката на пролетната равноденствена точка взета от карта в стандартна епоха – 1 т.

В) 5 т.

За правилно определяне на положението на пролетната равноденствена точка в текущата епоха (на снимката) и за правилен метод за определяне на момента на опозиция, т.е. на момента на получаване на снимката – 5 т. (Ако не се отчита разликата в епохите – 3 т.)

Г) 1 т.

За посочване на Фомалхаут (α PsA) – 1 т.



Към решението на Задача 4-