

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ
XXIX НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг
Бургас, 9 май 2026 г.
Възрастова група 9-10 клас, първи тур

Решения

Задача 1. Разрез на планета. На Фиг 1. (след текстовете на условията) ви е даден опростен модел на вътрешния строеж на планета: графика на плътността в g/cm^3 като функция на разстоянието до центъра на планетата в km.

А) Пресметнете масата на планетата в земни маси. Масата на Земята е $5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. [4т.]

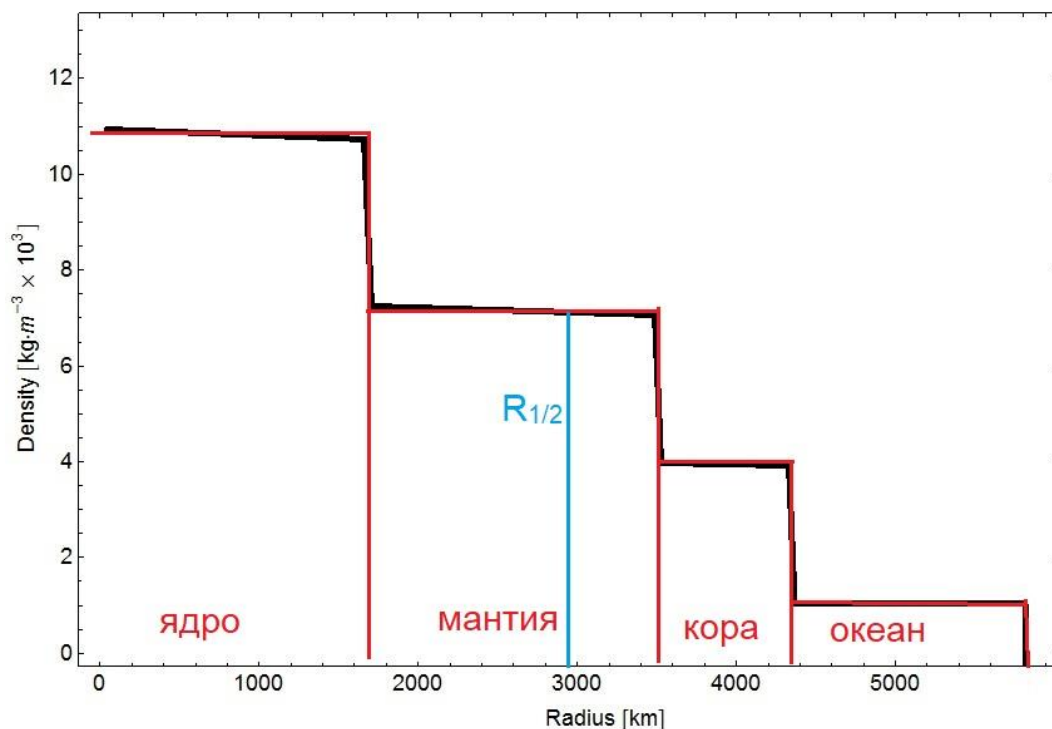
Б) Пресметнете средната плътност на планетата, в g/cm^3 . [2т.]

В) Пресметнете гравитационното ускорение g_0 на повърхността на планетата (разстояние R от центъра) и гравитационното ускорение $g_{1/2}$ на разстояние $R/2$ от центъра ѝ. [4т.]

Г) Пресметнете скоростта на избягване от повърхността на планетата (втора космическа скорост). [2т.]

Д) От какво може да е съставен повърхностният слой на планетата? [2т.]
Гравитационна константа: $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$

Решение:



А) Забелязваме, че планетата е разделена на 4 слоя. Нека ги кръстим условно: ядро, мантия, кора и океан. За всеки от слоевете по графиката измерваме вътрешен радиус, външен радиус и плътност. Резултатите от измерванията са представени в таблица.

Слой	вътр. радиус R_1 [km]	външен радиус R_2 [km]	плътност [g/cm ³]	маса на слоя M_i [kg]
ядро	0	1680	10,8	$2,14 \cdot 10^{23}$ kg
мантия	1680	3520	7,2	$1,17 \cdot 10^{24}$ kg
кора	3520	4360	4,0	$6,58 \cdot 10^{23}$ kg
океан	4360	5830	1,1	$5,31 \cdot 10^{23}$ kg

За всеки от тези концентрични слоеве пресмятаме масата като използваме формулата за обем на сфера и маса = плътност.обем:

$$M_i = \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) \rho$$

Сумираме масите на слоевете и получаваме маса на планетата $M = 2,58 \cdot 10^{24}$ kg, което са 0,43 земни маси.

В) Радиусът на планетата е границата на най-външния слой. От графиката той е приблизително $R = 5830$ km. Средната плътност е цялата маса, разделена на целия обем:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} = 3,1 \text{ g/cm}^3$$

В) Гравитационното ускорение на повърхността на планетата е

$$g = \frac{GM}{R^2} = 5,05 \text{ m/s}^2$$

Гравитационното ускорение на разстояние $R/2$ от центъра по същата формула е

$$g_{1/2} = \frac{GM_{1/2}}{(R/2)^2}$$

В тази формула $M_{1/2}$ е масата, заключена в радиус $R/2 = 2915$ km от центъра на планетата. Пресмятаме я по същия начин, както M - сумираме масата на ядрото и на мантията, само до разстояние 2915 km. Получаваме $M_{1/2} = 8,18 \cdot 10^{23}$ kg и $g_{1/2} = 6,42 \text{ m/s}^2$.

Г) Скоростта на избягване от повърхността на планетата е:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 7,7 \text{ km/s}$$

Д) Плътността на повърхностния слой е близо до 1 g/cm^3 , така че вероятно той е съставен от молекули на леки елементи. Може да се спекулира, че е от вода, т.е. че наистина това е океан, обаче много дълбок – около 1500 km вместо 3-4 km като океаните на Земята.

Критерии за оценяване (общо 14т.):

А) 4т. за измервания, формула за обем на сфера и получаване на масата, вкл. 2,5т. за коректен числен резултат за масата в рамките на 10%

Б) 2т. за пресмятане на средната плътност

В) 4т.: 1,5 т. за формула за g , 0,5т. за резултат + 2т. за пресмятане на $g_{1/2}$

Г) 2т.: 1,5т. за формула за втора космическа скорост, 0,5т. за резултат

Д) 2т. за съображения относно състава на повърхностния слой

Задача 2. Приятели. През 2126 г. Мишо, който живее на Марс, гостува на Гошо, който живее на Земята. Двамата отдавна са приятели, но често спорят и понякога дори малко се надлъгват. Ето техния диалог:

Мишо: „Оох, колко ми е тежко тук, на Земята. У дома на Марс кантарът показва много по-малко тегло, отколкото този тук.“

Гошо: „Да, бе, да! Не е толкова тежко (рита топката нагоре) – виждаш ли, до балкона на петия етаж стига, 15 метра, мерили сме го.“

Мишо: „Аз ако я ритна така на Марс, сигурно ще стигне до 50-ия етаж.“

Гошо: „Е-хее, добре де, може да ви е по-леко на Марс, но пък там при вас трябва да е доста мрачно. Сигурно Слънцето ви свети 5 пъти по-слабо, отколкото тук.“

Мишо: „Е, не е така, но стига сме спорили. Вече се стъмни. Гледай, гледай, Марс се вижда горе в небето! Юпитер обаче е по-ярък.“

Гошо: „Знаеш ли, аз веднъж видях родния ти Марс, когато беше във велико противостояние. Тогава и Юпитер беше в противостояние, но Марс беше малко по-ярък!“

А) Наистина ли Мишо може да хвърли топката толкова високо на Марс? [5т.]

Б) Дали на Марс е толкова мрачно, колкото казва Гошо? [3т.]

В) Докажете, че е вярно последното твърдение на Гошо за блясъка на Марс във велико противостояние (то се случва, когато Марс е в противостояние и близо до перихелия на своята орбита.) [6т.]

Обосновете всички свои отговори с количествени пресмятания.

Справочни данни:

Радиус на Марс: 3390 km

Радиус на Юпитер: 69900 km

Алbedo на Марс: 0,17

Алbedo на Юпитер: 0,54

Ускорение на силата на тежестта на Марс: $3,72 \text{ m/s}^2$

Земно ускорение: $9,81 \text{ m/s}^2$

Голяма полуос на марсианската орбита: 1,523 au

Ексцентрицитет на марсианската орбита: 0,0934

Радиус на орбитата на Юпитер: 5,20 au

Решение:

А) Нека означим с v_0 началната скорост, с която Гошо ритва своята топка нагоре от земната повърхност, с H максималната височина, до която достига топката и с t времето, за което топката се издига на тази максимална височина. За височината можем да напишем:

$$H = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

където g е земното ускорение. В най-високата точка на полета скоростта на топката става равна на нула, следователно:

$$0 = v_0 - gt$$

Изключваме времето t от тези две уравнения и получаваме:

$$H = \frac{v_0^2}{2g}$$

Да приемем, че на Марс Мишо може да ритне нагоре същата топка със същата начална скорост v_0 , както Гошо на Земята. Тогава височината, до която тя ще стигне, ще бъде:

$$H_M = \frac{v_0^2}{2g_M},$$

където g_M е ускорението на силата на тежестта на Марс. От последните две равенства намираме:

$$H_M = H \cdot \frac{g}{g_M} \approx 2,64H \approx 40 \text{ m} \approx 13 \text{ етаж}$$

Наистина, едва ли Мишо ще може да ритне топката на Марс до 50-тия етаж на някое здание в някой марсиански град.

Б) Осветеността E_0 , която Слънцето създава на Земята и осветеността E_{0M} , която то създава на Марс, са в следното съотношение:

$$\frac{E_0}{E_{0M}} = \frac{r_M^2}{r^2}$$

Ако приемем, че $r = 1$ аи, а r_M е следното разстояние от Марс до Слънцето (голямата полуос на марсианската орбита), то:

$$\frac{E_0}{E_{0M}} \approx 2,31$$

Да пресметнем това съотношение в най-неблагоприятния случай – когато Марс е в афелия на своята орбита. Тогава разстоянието от Марс до Слънцето ще бъде равно на $r_M(1 + e)$, където e е ексцентрицитетът на марсианската орбита. За този случай получаваме:

$$\frac{E_0}{E_{0M}} \approx 2,53$$

Действително, на Марс осветяването от Слънцето е около 2,3 – 2,5 пъти по-слабо, отколкото на Земята, но не и 5 пъти, както предполага Мишо.

В) Означаваме с L светимостта на Слънцето, с E_M и E_J осветеностите, които Слънцето създава на Марс във велико противостояние и на Юпитер, а с r_J разстоянието от Юпитер до Слънцето.

$$E_M = \frac{L}{4\pi r_M^2 (1 - e)^2}$$

$$E_J = \frac{L}{4\pi r_J^2}$$

Нека R_M и R_J са радиусите на Марс и Юпитер, а A_M и A_J са отражателните способности (албедото) на двете планети. Общото количество лъчиста енергия от Слънцето, което попада за единица време върху Марс и ще се отразява към Земята, ще бъде пропорционално на площта на напречното сечение на планетата и на нейното алbedo:

$$W_M \propto A_M E_M \cdot \pi R_M^2$$

Аналогично за Юпитер:

$$W_J \propto A_J E_J \cdot \pi R_J^2$$

Осветеността, която Марс във велико противостояние създава на Земята, ще бъде пропорционална на тази енергия и обратно пропорционална на квадрата на разстоянието между Марс и Земята в такъв момент:

$$E_{MT} \propto \frac{W_M}{[r_M(1-e) - r]^2}$$

За осветеността, която Юпитер в противостояние ще създава върху Земята, можем да напишем:

$$E_{JT} \propto \frac{W_J}{(r_J - r)^2}$$

Навсякъде тук си служим със знак за пропорционалност, тъй като не са известни точните коефициенти. Но крайната ни цел е да пресметнем отношението на тези две осветености. При това коефициентите ще се съкратят и можем вече да поставим знак за равенство:

$$\frac{E_{MT}}{E_{JT}} = \frac{W_M}{W_J} \cdot \frac{(r_J - r)^2}{[r_M(1-e) - r]^2}$$

Оттук накрая получаваме:

$$\frac{E_{MT}}{E_{JT}} = \frac{A_M}{A_J} \cdot \frac{R_M^2}{R_J^2} \cdot \frac{r_J^2}{r_M^2(1-e)^2} \cdot \frac{(r_J - r)^2}{[r_M(1-e) - r]^2}$$

$$\frac{E_{MT}}{E_{JT}} \approx 1,278$$

Вижда се, че полученото съотношение е по-голямо от единица и твърдението на Гошо наистина е вярно – при опозиция на Марс във велико противостояние той може да е по-ярък за земния наблюдател от Юпитер в опозиция.

Критерии за оценяване (общо 14 т.):

А) 5 т.

За съставяне на приблизителен модел на ситуацията (предположението, че на Марс топката ще бъде ритната със същата начална скорост) – 2 т.

За формули и алгебрични пресмятания – 2 т.

За верен краен резултат и заключение – 1 т.

Б) 3 т.

За формули и алгебрични пресмятания – 2 т.

За верен числен резултат и краен извод – 1 т.

В) 6 т.

За отчитане на осветеността, създавана от Слънцето на Марс и Юпитер – 1 т.

За отчитане на влиянието на албедото – 1 т.

За отчитане на размерите на Марс и Юпитер – 1 т.

За отчитане на разстоянията на Марс и Юпитер в опозиция до Земята – 1 т.

За алгебрични преобразования, правилен числен резултат и краен извод – 2 т.

Задача 3. Елена и Николай. Елена от Русе и Николай от Варна са много добри приятели и докато били ученици, те често се срещали на различни астрономически и научни събития. Разбира се, те завършили училище и всеки поел по своя път... И двамата станали астрономи и започнали работа в големи обсерватории, но разположени в различни части на света.

Един ден, напълно без да се уговарят, те се срещнали на една научна конференция, която се провела в столицата на Катар – Доха ($\varphi = 25^\circ 17'$ северна ширина, $\lambda = 51^\circ 32'$ източна дължина). Една вечер, след докладите, те решили да се разходят по красивата крайбрежна ивица и всеки от тях да разкаже „с какво се е преборил и какво е надживял“... По едно време, Елена и Николай забелязали, че пълната Луна се намира точно в зенита!

А) Възможно ли е в този момент те да наблюдават лунно затъмнение (т.е. макар и частично Луната да е в плътната сянката на Земята)? **[8т.]**

После те се заговорили за това къде се намират обсерваториите в които работят. Николай решил да не казва на Елена точните координати, а само да ѝ даде подсказка. Той казал: „В моята обсерватория Луната не може да се наблюдава в зенита, но е възможно тя да бъде неизгряващо светило! В момента се намирам приблизително на 4000 km от работното си място!“

Елена му отговорила: „В моята обсерватория в момента е точно 3 h 29 min местно слънчево време. Ако на 22 септември пътувам 145 km точно на юг, аз ще имам възможността да наблюдавам най-краткия изгрев на Слънцето.“

Б) Намерете координатите на обсерваториите, в които работят Елена и Николай. В кои държави се намират те? **[6т.]**

Обяснете подробно решението си.

Приемете, че орбитите на Земята около Слънцето и на Луната около Земята са кръгови.

Справочни данни:

Радиус на Земята: 6378 km Радиус на Слънцето: 696 000 km

Наклон на еклиптиката спрямо небесния екватор: $23^\circ 26'$

Наклон на лунната орбита спрямо еклиптиката: $5^\circ 9'$

Разстояние Земя – Слънце: 149,6 млн km

Радиус на орбитата на Луната: 384 000 km

Радиус на Луната: 1738 km

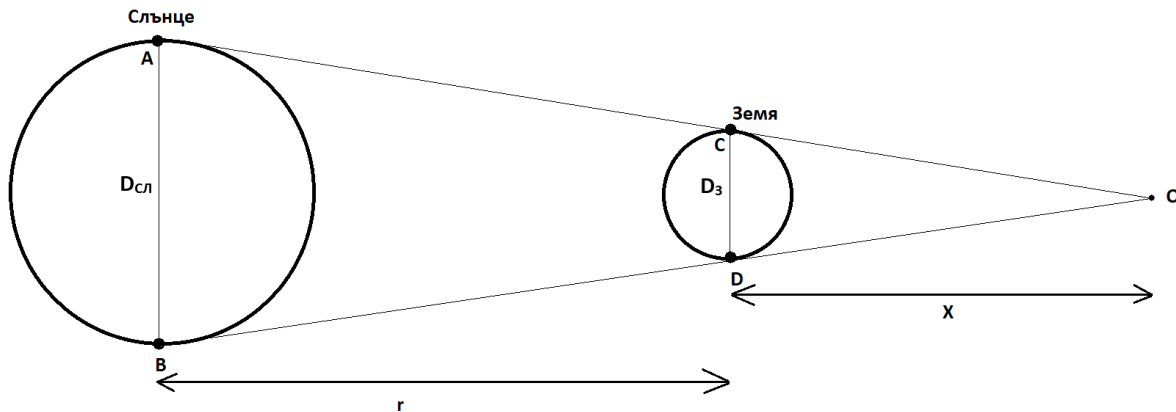
Рефракция на хоризонта: $35'$

Решение:

А) От това, че Луната се намира в зенита за наблюдател в Доха, следва, че нейната деклинация δ_L е равна на географската ширина на катарската столица $\varphi = 25^\circ 17'$.

За да преценим дали е възможно в този момент Елена и Николай да наблюдават лунно затъмнение, трябва да намерим видимите ъглови размери на Луната θ_L и на плътната сянка на Земята (на нейното сечение, през което Луната преминава) - β .

На долния чертеж са показани Слънцето, Земята и плътната сянка на Земята (областта, в която Слънцето се вижда изцяло закрито от нашата планета).



Нека въведем следните означения:

$D_{Сл}$ – диаметър на Слънцето

$D_З$ – диаметър на Земята

r – разстояние Земя-Слънце

X – разстояние от центъра на Земята до върха на Земята сянка

$r_{ЗЛ}$ – разстояние Земя-Луна

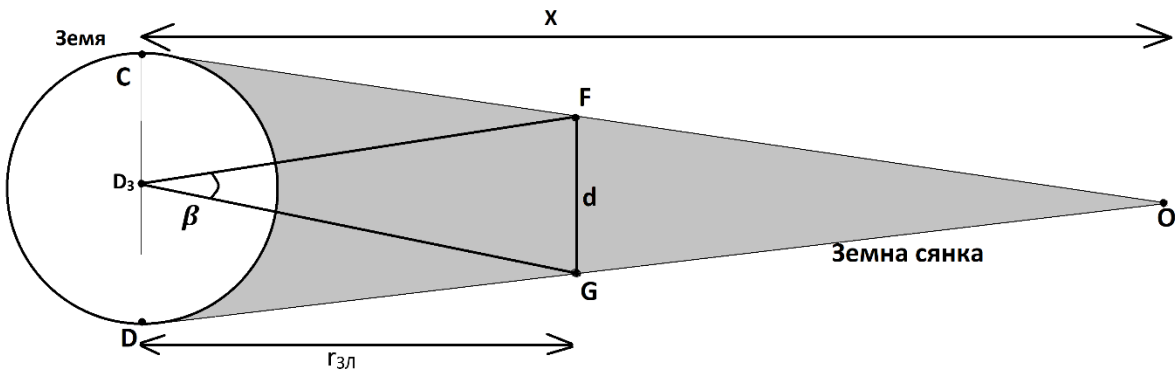
От подобие на триъгълници OAB и OCD следва че:

$$\frac{D_З}{X} = \frac{D_{Сл}}{r + X}$$

От тук получаваме:

$$X = \frac{D_З r}{D_{Сл} - D_З} \approx 1,38 \text{ млн } km$$

На следващата схема, с d е означен диаметърът на сечението от земната сянка, през което преминава Луната по време на лунно затъмнение.



Използвайки подобие на триъгълниците OCD и OFG, можем да запишем следното равенство:

$$\frac{d}{D_3} = \frac{X - r_{ЗЛ}}{X}$$

Следователно:

$$d = \frac{X - r_{ЗЛ}}{X} D_3 \approx 9\,216\text{km}$$

Видимият ъглов размер на този диаметър за земен наблюдател е:

$$\beta = \frac{d}{r_{ЗЛ}} \approx 82',5$$

Видимият ъглов размер на Луната за същия наблюдател е:

$$\theta_L = \frac{D_L}{r_{ЗЛ}} \approx 31',3$$

Максималната възможна деклинация на центъра на земната сянка е равна на наклона на еклиптиката спрямо небесния екватор $\varepsilon = 23^\circ 26'$.

Това означава, че максималната деклинация, която може да има центърът на лунния диск, за да бъде Луната поне частично в плътната сянка е:

$$\delta_{MAX} = \varepsilon + \frac{\beta + \theta_L}{2} \approx 24^\circ 23'$$

За съжаление, при това положение, Елена и Николай няма как да наблюдават лунно затъмнение, защото реалната деклинация на Луната е по-голяма с почти един градус.

Б) Понеже Елена е дама, то първо ще намерим координатите на нейната обсерватория ☺. Тъй като те наблюдават пълната Луна точно в зенита, то местното слънчево време в Доха е 0:00 (местна полунощ).

Тя казва, че в същия момент местното слънчево време за нейното работно място е 3h 29min. Това означава, че географската дължина на нейната обсерватория е:

$$\lambda_E = \lambda + \frac{3h\,29min}{24h} 360^\circ \approx 103^\circ 47'E$$

Елена също казва, че обсерваторията, в която тя работи се намира на разстояние $s=145\text{km}$ северно от мястото, от което на 22 септември може да наблюдава най-краткият изгрев на

Слънцето. Това място е някоя точка от екватора, защото там Слънцето изгрява перпендикулярно на хоризонта, а в деня на равноденствие то се намира на небесния екватор, т.е. има най-голяма видима ъглова скорост.

Следователно, географската ширина на обсерваторията е:

$$\varphi_E = \frac{s}{2\pi R_3} 360^\circ \approx 1^\circ 18' N$$

Точката с тези географски координати се намира в Сингапур ☺.

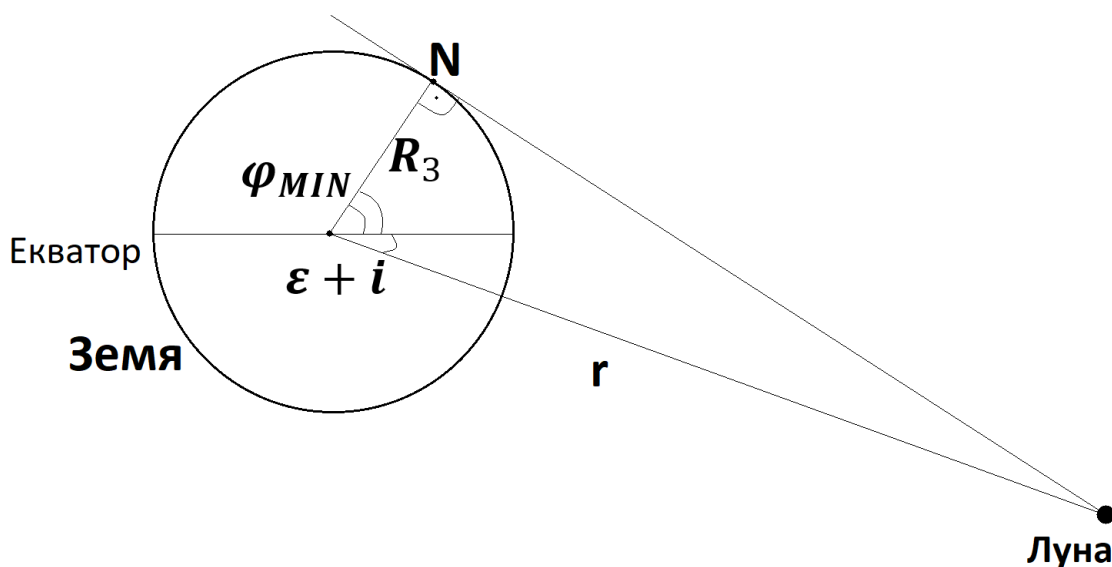
Сега нека намерим и координатите на обсерваторията, в която работи Николай.

Той казва, че от неговата обсерватория Луната може да бъде неизгряващо светило.

Нека да намерим възможно най-малката географска ширина, от която това може да се случи φ_{MIN} .

Ако с i означим наклона на лунната орбита спрямо еклиптиката, то максималната южна деклинация на Луната е $\delta_{MIN} = -(\epsilon + i) = 28^\circ 35'$.

На чертежа Луната е показана в положението, в което има именно такава деклинация.



Наблюдателят в точка N има търсената ширина φ_{MIN} . Можем да запишем, че:

$$\cos(\epsilon + i + \varphi_{MIN}) = \frac{R_3}{r_{3Л}}$$

От тук намираме, че:

$$\varphi_{MIN} = \arccos\left(\frac{R_3}{r_{3Л}}\right) - (\epsilon + i) \approx 60^\circ 28'$$

Тук би следвало да отчетем още два фактора:

- Видимият ъглов размер на Луната θ_L
- Рефракцията на хоризонта ρ .

Поради тяхното влияние, търсената минимална географска ширина действително е:

$$\varphi'_{MIN} = \varphi_{MIN} + \rho + \frac{\theta_L}{2} \approx 61^\circ 11'$$

Нека да пресметнем разстоянието d между Доха и най-близката точка от паралел, който има ширина φ'_{MIN} .

Може да запишем:

$$d = \frac{\varphi'_{MIN} - \varphi}{360^0} 2\pi R_3 \approx 3\,996\text{ km}$$

Николай казва, че неговата обсерватория се намира приблизително на 4 000 km от Доха, което е много близко до полученото. Но тъй като от нейното местоположение, Луната може да се наблюдава като неизгряващо светило, можем да заключим, че тя е на същия меридиан както столицата на Катар (т.е. има същата географска дължина) и лежи на паралел с географска ширина φ'_{MIN} .

Координатите на обсерваторията, в която работи Николай са: $\lambda_N = 51^0 32' E$; $\varphi_N = 61^0 11' N$.

Тази точка се намира в република Коми в Русия.

Критерии за оценяване (общо 14т.):

А) 8т.

- За намиране на деклинацията на Луната - 0,5т.
- За правилни геометрични съображения, от които може да се намери максималното ъглово отстояние между центъра на лунния диск и център на земната сянка, при положение, че се наблюдава лунно затъмнение – 5т.
- За намиране на максималната възможна деклинация на центъра на земната сянка – 1т.
- За съобразяване на максималната деклинация, която може да има центърът на Луната, за да се наблюдава лунно затъмнение – 1т.
- За правилен извод – 0,5 т.

Б) 6т.

- За правилни разсъждения за географската ширина на обсерваторията на Елена и верен числен резултат – 1т.
- За правилни разсъждения за географската дължина на обсерваторията на Елена и верен числен резултат – 1т.
- За намиране на най-ниската географска ширина, от която Луната може да бъде неизгряващо светило – 2т.
- За намиране на най-краткото разстояние между Доха и паралел с такава географска ширина – 1т.
- За окончателно съобразяване на координатите, на които се намира обсерваторията на Николай – 1т.

Разбира се, ако ученикът не е назвал точните имена на държавите, в които се намират двете обсерватории не се отнемат точки 😊.

Задача 4. Юпитер и Сатурн. На 21 декември 2020 г. имаме възможност да наблюдаваме едно много рядко астрономическо явление – близко съединение на Юпитер и Сатурн. В таблицата са дадени небесните екваториални координати на двете планети в момента на максимално сближаване.

Планета	Ректасцензия	Деклинация
Юпитер	$20^{\text{h}} 9^{\text{m}} 41,9^{\text{s}}$	$-20^{\circ} 35' 23''$
Сатурн	$20^{\text{h}} 9^{\text{m}} 45,7^{\text{s}}$	$-20^{\circ} 28' 56''$

А) Намерете видимото ъглово отстояние между Юпитер и Сатурн в момента, в който видимо са били най-близо една до друга. **[3т.]**

Б) На коя дата е настъпило следващото противостоене (опозиция) на всяка една от тези две планети? **[5т.]**

В) Оценете колко време след момента на максимално сближаване двете планети ще се отдалечат на ъглово отстояние 1° една от друга, за наблюдател на Земята. **[6т.]**

Приемете, че Земята, Юпитер и Сатурн се движат по идеално кръгови орбити, които лежат почти в една равнина.

Справочни данни:

Радиус на орбитата на Юпитер: 5,2 аи

Радиус на орбитата на Сатурн: 9,8 аи

Орбитален период на Земята: 365,25 d

Решение:

А) За намиране на ъгловото отстояние между Юпитер и Сатурн можем да използваме равнинна геометрия, защото техните координати са много близки и това отстояние е много малко (в рамките на няколко дъгови минути).

От таблицата виждаме, че деклинациите на Юпитер и Сатурн се различават с $\Delta\delta = 6' 27''$.

Разликата на ректасцензиите на двете планети е $\Delta\alpha = 3,8^{\text{s}} \approx 0,95'$ (Тук не отчитаме корекцията за това, че те не се намират на небесния екватор).

Използвайки равнинното приближение, за търсеното ъглово отстояние можем да запишем:

$$\Omega = \sqrt{(\Delta\alpha \cdot \cos(\delta))^2 + (\Delta\delta)^2}$$

Тук δ е приблизителната стойност на деклинацията на Юпитер и Сатурн.

След пресмятане, намираме:

$$\Omega \approx 6' 31''$$

Както се вижда, разликата между $\Delta\delta$ и Ω е съвсем малка, поради съвсем близките ректасцензии на планетите. Поради това е напълно допустимо да се запише, че $\Omega \approx \Delta\delta$ дори и без да се правят изчисления. Ако това е направено и са приведени аргументи в подкрепа на това твърдение, следва да се присъди максималният брой точки на това подусловие.

Нека въведем следните означения, които ще бъдат използвани в решенията на следващите две подусловия:

r_3 – радиус на орбитата на Земята

r_S – радиус на орбитата на Сатурн

r_J – радиус на орбитата на Юпитер

T_E – орбитален период на Земята

T_S – орбитален период на Сатурн

T_J – орбитален период на Юпитер

V_E – орбитална скорост на Земята

V_S – орбитална скорост на Сатурн

V_J – орбитална скорост на Юпитер

Б) Датата на съединението е 21 декември. Това е на практика датата на декемврийското слънцестоене. Това означава, че екваториалните координати на Слънцето в този момент, в много добро приближение, са: $\alpha_S = 18h$; $\delta_S = -23^\circ 26'$.

Ректасцензията на Юпитер и Сатурн е приблизително равна на $20h$. Това означава, че те се намират на около 2 часа или 30° източно по еклиптиката, спрямо Слънцето (*не се изисква по-точна оценка за елонгациите на планетите в този момент*). При това положение, те имат вечерна видимост и следващата основна конфигурация, относно Земята, в която ще бъдат е съединение със Слънцето.

За да намерим колко време е изминало от този момент до момента на следващото противостоене на всеки един от тях, трябва първо да намерим ъглите $\alpha_{Ю}$ и α_C чиито връх е в Слънцето, както е показано на чертежа.

От синусовата теорема можем да запишем следните равенства:

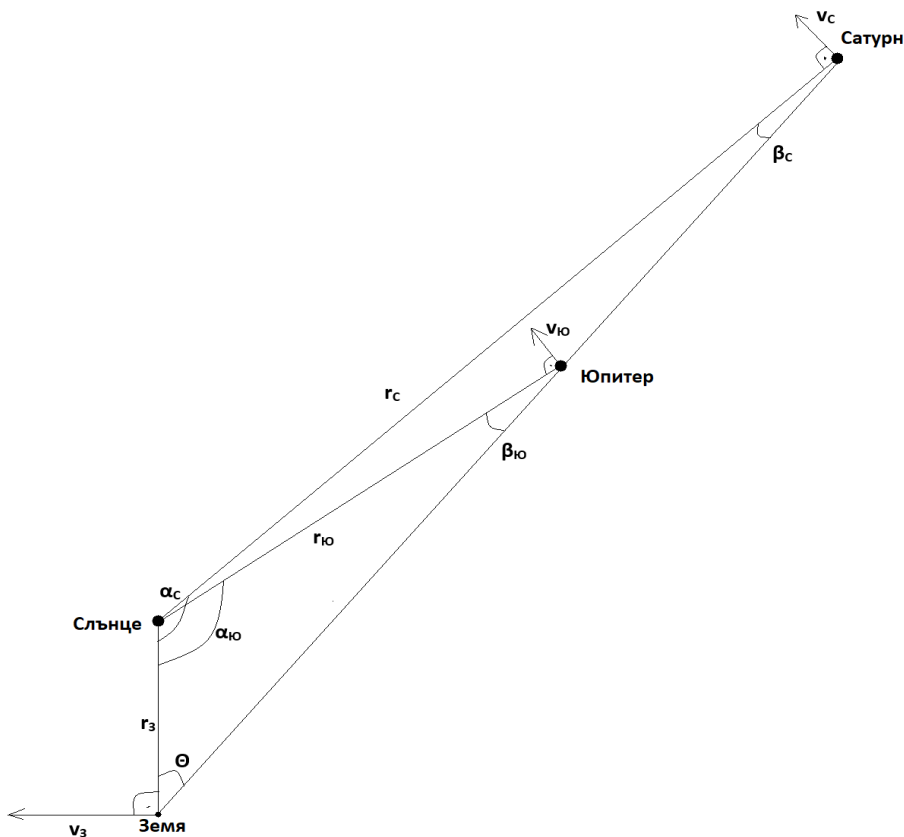
$$\frac{\sin\theta}{r_{Ю}} = \frac{\sin\beta_{Ю}}{r_3}$$
$$\frac{\sin\theta}{r_C} = \frac{\sin\beta_C}{r_3}$$

От тук намираме, че:

$$\beta_{Ю} = \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{r_{Ю}} r_3\right) \approx 5^\circ, 5$$
$$\beta_C = \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{r_C} r_3\right) \approx 2^\circ, 9$$

Следователно:

$$\alpha_{Ю} = 180 - (\theta + \beta_{Ю}) \approx 144^\circ, 5$$
$$\alpha_C = 180 - (\theta + \beta_C) \approx 147^\circ, 1$$



Използвайки

III закон на Кеплер, за орбиталните периоди на Юпитер и на Сатурн можем да запишем:

$$\frac{r[au]_C^3}{T[\text{г}]_C^2} = 1$$

$$\frac{r[au]_{Ю}^3}{T[\text{г}]_{Ю}^2} = 1$$

Пресмятаме, че: $T_{Ю} \approx 11,86$ г: и $T_C \approx 30,68$ г

За съответните синодични периоди $T_{SYN,Ю}$ и $T_{SYN,C}$ са в сила равенствата:

$$\frac{1}{T_{SYN,Ю}} = \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_{Ю}}$$

$$\frac{1}{T_{SYN,C}} = \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_C}$$

От тук:

$$T_{SYN,Ю} = \frac{T_3 T_{Ю}}{T_{Ю} - T_3} \approx 399 \text{ d}$$

$$T_{SYN,C} = \frac{T_3 T_C}{T_C - T_3} \approx 378 \text{ d}$$

Понеже предстои двете планети да бъдат в съединение със Слънцето, то интервалите от време, след които ще настъпят следващите им противостояния са:

$$\Delta t_{\text{Ю}} = \frac{360^\circ - \alpha_{\text{Ю}}}{360^\circ} \approx 239 \text{ d}$$

$$\Delta t_{\text{С}} = \frac{360^\circ - \alpha_{\text{С}}}{360^\circ} \approx 223 \text{ d}$$

Съответни дати са следните: 17 август 2021г за Юпитер и 1 август 2021г. за Сатурн.

Истинските дати са: 20 август 2021г за Юпитер и 2 август 2021г. за Сатурн.

В) За да намерим търсеното време, първо трябва да изразим относителната ъглова скорост на Юпитер, спрямо Сатурн, за наблюдател от Земята – ω .

Орбиталните скорости на Юпитер и на Сатурн са, както следва:

$$v_{\text{Ю}} = \frac{2\pi r_{\text{Ю}}}{T_{\text{Ю}}} \approx 13,1 \text{ km/s}$$

$$v_{\text{С}} = \frac{2\pi r_{\text{С}}}{T_{\text{С}}} \approx 9,5 \text{ km/s}$$

Нека с $X_{\text{Ю}}$ и $X_{\text{С}}$ да означим съответно разстоянията от Земята до Юпитер и от Земята до Сатурн.

От косинусовата теорема следва, че:

$$X_{\text{Ю}}^2 = r_3^2 + r_{\text{Ю}}^2 - 2r_3r_{\text{Ю}}\cos\alpha_{\text{Ю}}$$

$$X_{\text{С}}^2 = r_3^2 + r_{\text{С}}^2 - 2r_3r_{\text{С}}\cos\alpha_{\text{С}}$$

След пресмятане, намираме, че:

$$X_{\text{Ю}} \approx 6,2 \text{ au}$$

$$X_{\text{С}} \approx 9,4 \text{ au}$$

От чертежа се вижда, че компонентите на скоростите на Юпитер и Сатурн, които са перпендикулярни на отсечките, които ги свързват със Земята могат да се изразят по следния начин:

$$v'_{\text{Ю}} = v_{\text{Ю}}\cos\beta_{\text{Ю}} \approx 13,0 \text{ km/s}$$

$$v'_{\text{С}} = v_{\text{С}}\cos\beta_{\text{С}} \approx 9,50 \text{ km/s}$$

За да намерим видимите им ъгови скорости за земния наблюдател, трябва да отчетем и движението на Земята по нейната орбита.

Орбиталната скорост на Земята е:

$$v_3 = \frac{2\pi r_3}{T_3} \approx 29,8 \text{ km/s}$$

Компонентата на земната скорост, която е перпендикулярна на направлението към Юпитер и Сатурн (приемайки, че те лежат практически на една права линия с нашата планета) е:

$$v'_3 = v_3\cos\theta \approx 25,9 \text{ km/s}$$

Видимите ъгови скорости на Юпитер и Сатурн за земния наблюдател са:

$$\omega_{\text{Ю}} = \frac{v'_3 + v'_{\text{Ю}}}{X_{\text{Ю}}} \approx 12,5' / \text{d}$$

$$\omega_{\text{С}} = \frac{v'_3 + v'_{\text{С}}}{X_{\text{С}}} \approx 7,5' / \text{d}$$

Тъй като двете планети видимо се движат в една и съща посока на фона на звездите, то относителната им ъглова скорост е:

$$\omega = \omega_{\text{Ю}} - \omega_{\text{С}} \approx 5'/\text{d}$$

Тъй като първоначално те имат ъглово отстояние Ω , то времето, за което видимо ще се раздалечат на 1° е:

$$t = \frac{1^\circ - \Omega}{\omega} \approx 10,7\text{d}$$

Критерии за оценяване (общо 14т.):

A) 3т

- За правилен метод, по който се намира ъгловото отстояние между Юпитер и Сатурн (аргументирани и основателно използвани приближения) – 2т.
- За правилен числен резултат – 1т.

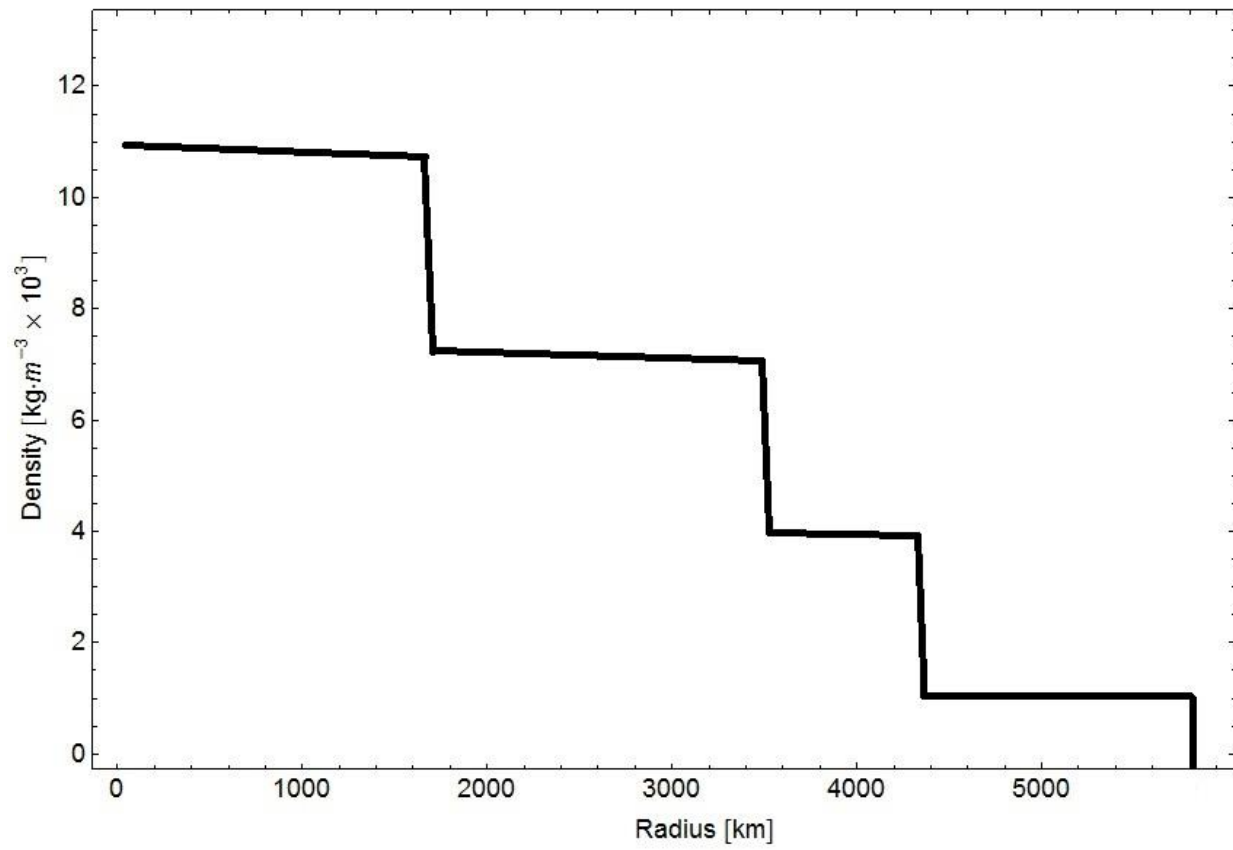
Б) 5т

- За правилно съобразени координати на Слънцето – 0,5т
- За правилна оценка на ъгловото отстояние между Слънцето и Юпитер и Сатурн – 0,5т
- За правилен метод за намиране на ъгъла с връх в Слънцето и верни числени резултати – 2т.
- За пресмятане на синодичните периоди на Юпитер и Сатурн – 1т.
- За правилен израз за търсените интервали от време и верни числени стойности – 1т.

В) 6т

- За намиране на орбиталните скорости на Юпитер и Сатурн – 1т.
- За намиране на разстоянията до тях на 21 декември 2020г. – 2т.
- За изразяване на перпендикулярните компоненти на скоростите на Юпитер и Сатурн и верни числени резултати – 1т.
- За правилно изразяване на видимите ъглови скорости – 1т.
- За правилно изразяване на търсения интервал от време и вярна числена стойност – 1т.

Фиг. 1 към задача 1.



Предайте този лист заедно с решенията си!