

Купа „Урания“ 2026 г.

Време за работа: 5 часа

Решения

Задача 1. Светилище. В обсерваторията на Тсарх Вилдоб – великият астроном на Трънливата планета – има точни ъгломерни инструменти. С тях той е установил, че видимият ъглов диаметър на Животворното слънце се нанася 240 пъти върху пълната окръжност и е постановил този диаметър да се използва като единица мярка за ъгъл. Ние ще го наричаме тук слънчев градус.

В най-дългия ден на годината – Денят на Високото слънце – според измерванията на Тсарх Вилдоб, слънцето се е издигнало на максимална височина 52 слънчеви градуса над южния хоризонт. Половин година по-късно Слънцето се издига само на 4 слънчеви градуса максимална височина над хоризонта.

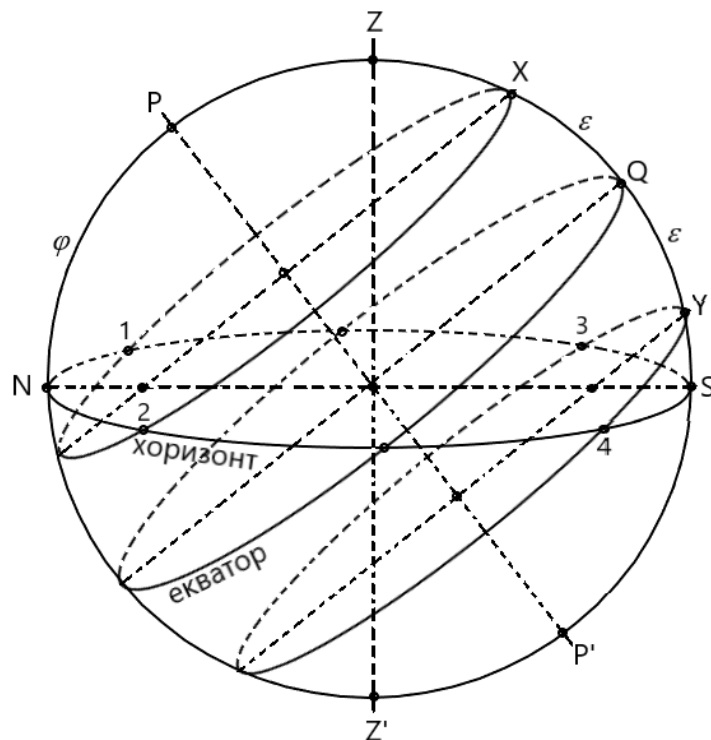
А) Млад ученик на Тсарх Вилдоб разказва, че на юг от неговата обсерватория живее малко племе, за чиито жители в средата на Деня на Високото слънце се случва нещо страшно – те си изгубват сенките! Пътят дотам бил 10 слънчеви градуса по планетографска ширина. Тсарх Вилдоб намира грешка в неговите пресмятания. Поправете тази грешка. [4т.]

Б) Великият астроном разказва на ученика си, че е посещавал място, където в Деня на Високото слънце по пладне слънцето се издига до височина 40 слънчеви градуса, а половин година по-късно – до височина 32 слънчеви градуса над хоризонта. Младият ученик не може да повярва. Обяснете дали е възможно в този случай Великият астроном да не греши и подкрепете вашия отговор с пресмятания. [5т.]

В) До своята обсерватория Тсарх Вилдоб построява светилище в чест на Животворното слънце. Светилището представлява кръг, в средата на който стоят ъгломерните инструменти. По кръга са разположени 4 арки. В две от тях от центъра на кръга се вижда слънцето при изгрев и залез в Деня на Високото слънце, а в другите две то се вижда при изгрев и залез половин година след този ден. Направете необходимите пресмятания и начертайте схема на светилището, като означите посоките на света и положенията на арките по кръга. [6т.]

Решение:

Резултатите от измерванията на великия астроном ни показват, че Блатистата планета има определен наклон на екватора към орбиталната ѝ равнина, който ще отбележим с ε . На схемата е дадена небесната сфера за наблюдател в обсерваторията на Тсарх Вилдоб. С X е означено положението на Животворното слънце по пладне в най-дългия ден от годината, т.е. в деня на лятното слънцестояние. В този ден деклинцията на слънцето ще бъде равна на ε . С Y е означено положението на слънцето по пладне половин година по-късно, следователно в деня на зимното слънцестояние, когато деклинацията на слънцето е също равна на ε , но с отрицателен знак, защото то е в южната небесна полусфера.



Фиг. 1.

Според измерванията на Тсарх Вилдоб:

$$SX = 52 \text{ слънчеви градуса} = 78^\circ$$

$$SY = 4 \text{ слънчеви градуса} = 6^\circ$$

Оттук намираме:

$$SX - SY = 2\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{SX - SY}{2} = 24 \text{ слънчеви градуса} = 36^\circ \text{ (наши земни градуси)}$$

Както е известно, височината на северния небесен полюс над хоризонта е равна на географската ширина φ на мястото, а височината над хоризонта на точката Q, в която небесният екватор пресича местния меридиан, е равна на $90^\circ - \varphi$. Следователно:

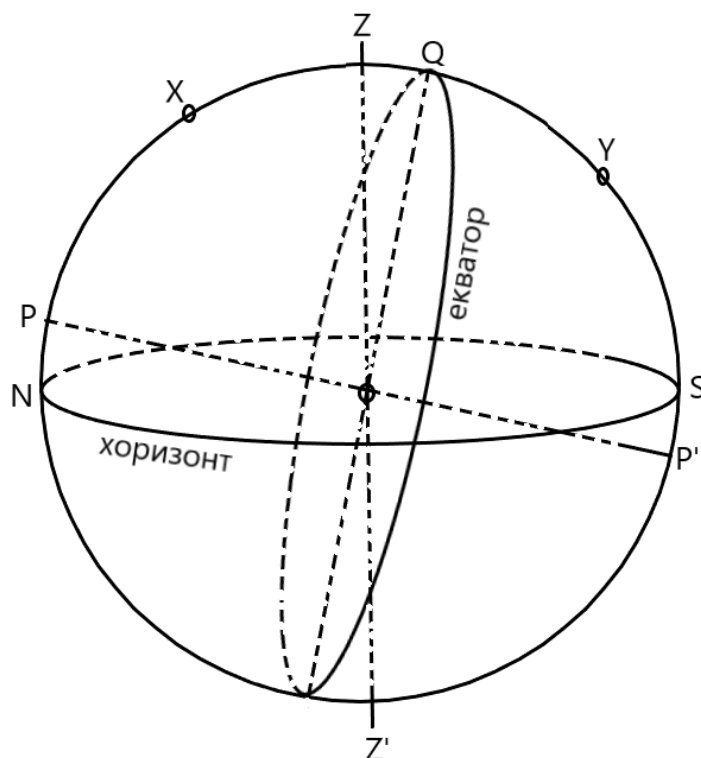
$$SQ = 90^\circ - \varphi = SY + \varepsilon$$

Оттук пресмятаме планетографската ширина на обсерваторията на великия астроном:

$$\varphi = 90^\circ - SY - \varepsilon = 48^\circ = 32 \text{ слънчеви градуса}$$

Мястото, където в Деня на Високото слънце (лятното слънцестояние) по пладне съществата си изгубват сенките (защото слънцето се издига до зенита), трябва да е на северната тропична окръжност, която има планетографска ширина, равна на ε , т.е. 24 слънчеви градуса, или 36° . Като се тръгне на юг от обсерваторията, за да се стигне дотам, трябва да се изминат $32 - 24 = 8$ слънчеви градуса, а не 10, както твърди ученикът на Тсарх Вилдоб. В това е и неговата грешка, която великият астроном е поправил.

Великият астроном разказва на своя ученик за място, където височините на слънцето по пладне при двете слънцестояния са 40 и 32 слънчеви градуса (60° и 48°). При ситуация, подобна на описаната по-горе, би трябвало разликата между тези височини да се равнява на 2ε , т.е. на 48 слънчеви градуса, което очевидно не е вярно. Такава ситуация, обаче, е възможна, ако при лятното слънцестояние слънцето кулминира на север от зенита. Тогава неговата височина над хоризонта ще се отчита не от точката юг (S) на хоризонта, а от точката север (N), както е показано на схемата.



За тази схема трябва да са валидни следните равенства:

$$NX = 60^\circ$$

$$SX = 48^\circ$$

$$XQ = YQ = \varepsilon$$

Тогава трябва да е изпълнено равенството:

$$60^\circ + 2\varepsilon + 48^\circ = 180^\circ$$

Проверката чрез заместване с $2\varepsilon = 72^\circ$ показва, че това действително е така и следователно ситуацията наистина е възможна. За планетографската ширина φ_1 на такова място можем да напишем:

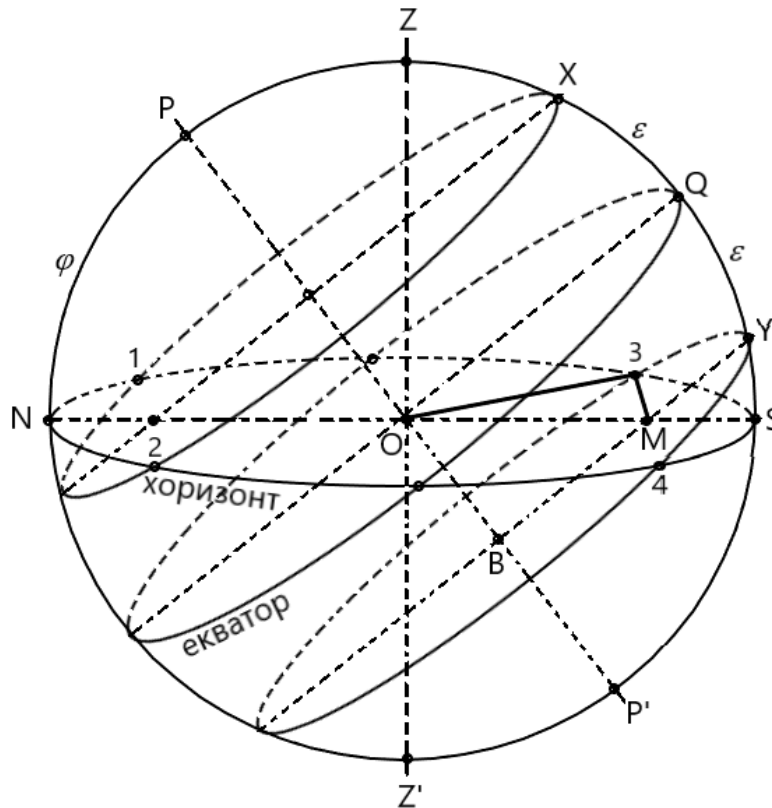
$$SY + YQ = 90^\circ - \varphi_1$$

Но $YQ = \varepsilon = 36^\circ$, а $SY = 48^\circ$. Оттук получаваме:

$$\varphi_1 = 90^\circ - 48^\circ - 36^\circ = 6^\circ \text{ или } 4 \text{ слънчеви градуса}$$

Ако светилицето представлява хоризонтален кръг по земята, то посоките от центъра на кръга, в които трябва да се виждат изгревът и залезът на слънцето при лятно слънцестояние, се определят от точките 1 и 2 на Фиг. 1. Посоките, в които трябва да се

виждат изгревът и залезът на слънцето при зимно слънцестояние, се определят от точките 3 и 4.



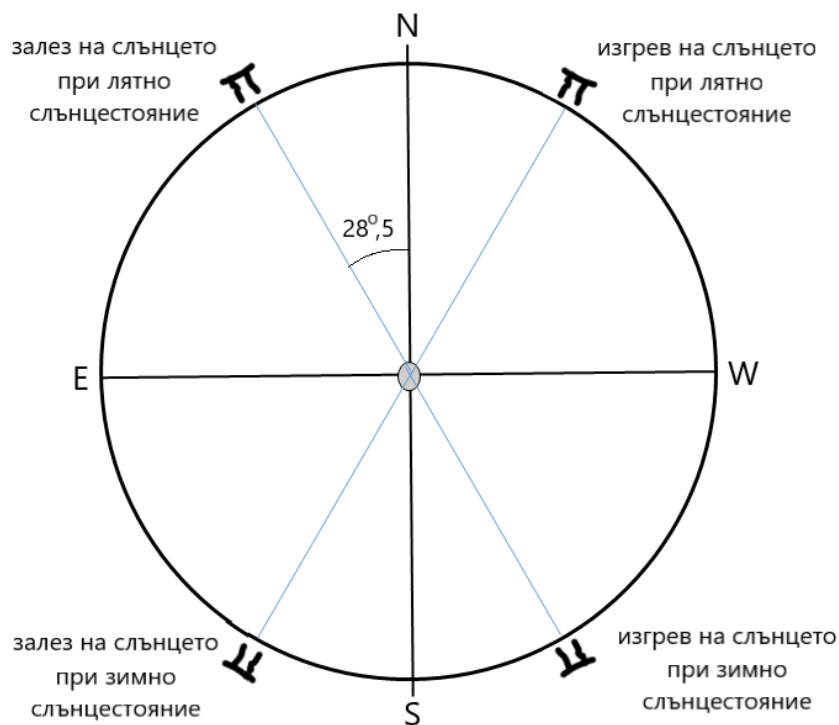
За да определим местата на арките в светилището, трябва да намерим на колко е равен ъгълът $MO3$. Въвеждаме условно радиус на небесната сфера R . Разглеждаме първо триъгълника OBM . В него:

$$\begin{aligned} OB &= R \sin \varepsilon \\ \angle MOB &= \varphi \\ OM &= \frac{OB}{\cos \varphi} = \frac{R \sin \varepsilon}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

А сега разглеждаме триъгълника $MO3$. Той също е правоъгълен. Страната $O3$ е равна на R .

$$\begin{aligned} \cos(\angle MO3) &= \frac{OM}{O3} = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi} \\ \angle MO3 &\approx 28^\circ,5 \end{aligned}$$

Това е ъгълът, на който трябва да отстои арка 3 от посоката юг в кръга на светилището. На същия ъгъл трябва да отстои и арка 4, но надясно от посоката юг, а положенията на арките 1 и 2 трябва да остоят на същите ъгли, но от посоката север. Така начертаваме схема на светилището.



Критерии за оценяване (общо 15 т.)

А) Общо 4 т.

За определяне на наклона на оста на планетата и географската ширина на обсерваторията – 3 т.

За поправяне на грешката на ученика – 1 т.

Б) Общо 5 т.

За правилна идея как това може да се реализира (кулминация на слънцето на север от зенита) – 1 т.

За правилна геометрична представа – 1 т.

За пресмятания и математическа обосновка – 3 т.

В) Общо 6 т.

За правилен метод за пресмятане – 3 т.

За верни числени резултати – 1 т.

За схема на светилицето – 2 т.

Задача 2. Приключенията на капитан Апостолов. Русенският капитан Преслав Апостолов пътува из космоса със своя междузвезден кораб и се оказва в най-различни ситуации, посещавайки различни звездни системи. В тази задача ще ви разкажем за три от тях, свързани със звездни системи, кръстени на откривателите си – приятели на капитан Апостолов от ученическите му години.

А) Веднъж капитан Апостолов посетил със своя кораб планета около малката звезда Нихат-23 с маса 0,34 слънчеви и останал там цяла година. Планетата обикаляла около Нихат-23 по кръгова орбита с период 56,0 d. Там той разпознал по небето своето родно Слънце, както и звездата Регул ($\lambda = 149,0^\circ$, $\beta = 0,5^\circ$ от Земята), и започнал редовни астрономически наблюдения с портативната си обсерватория. Той забелязал, че по небето на Нихат-23 Регул се намира много близо до малка галактика, която за Земята е почти точно в точката на есенно равноденствие. Той измерил, че годишният паралакс на Слънцето е 12,3 mas.

- Каква е била видимата звездна величина на Регул по небето на Нихат-23, ако на земното небе е 1,40 mag? Разстоянието Слънце-Регул е 24,30 pc.

- На коя дата Слънцето покрива Нихат-23 за земен наблюдател?

- Капитан Апостолов отлетял в посока обратна на Регул с постоянна скорост от хиляди километри в секунда в търсене на нови приключения и влязъл в криостаз. Инструментите на борда периодически измервали собственото движение илъчевата скорост на Слънцето. В даден момент бордовият компютър показаллъчева скорост на Слънцето с 30% по-висока от началната. С колко процента се е било понижило собственото движение на Слънцето?

[8т.]

Б) Веднъж капитан Апостолов се движел със своя кораб с изключени двигатели в орбита около звездата от Главната последователност Марина-37. Използвайки спектрографа на борда, той забелязал странно явление: съществувала друга, далечна звезда, такава, че сумата от радиалните скорости на Марина-37 и на далечната звезда, засечени от кораба, винаги давала една и съща стойност. Капитан Апостолов измерил с бордовия фотометър и записаллъчистия поток от Марина-37 в момент 1. След известно време, в момент 2, капитан Апостолов направил ново измерване и забелязал, челъчистият поток от Марина-37 се е повишил с точно 37% спрямо момент 1, а орбиталната скорост на кораба се е повишила с точно 3,7 km/s спрямо момент 1. Ако в момент 2лъчистият поток, измерен от кап. Апостолов е бил точно равен на потока, който Слънцето създава на Земята, то:

- изчислете орбиталната скорост на кораба в момент 2

- оценете масата, светимостта и спектралния клас на звездата Марина-37

[6т.]

В) Веднъж капитан Апостолов избирал коя е следващата звездна система, която ще посети. Започнал да изследва системата Виктор-09, намираща се на няколко парсека от него. Изчисленията му показали, че за да влезе в кръгова орбита около Виктор-09 с радиус на орбитата 100 радиуса на звездата, скоростта на кораба му спрямо звездата трябва да бъде 60 km/s. Капитан Апостолов веднага се отказал да доближава тази звезда. Защо? **[3т.]**

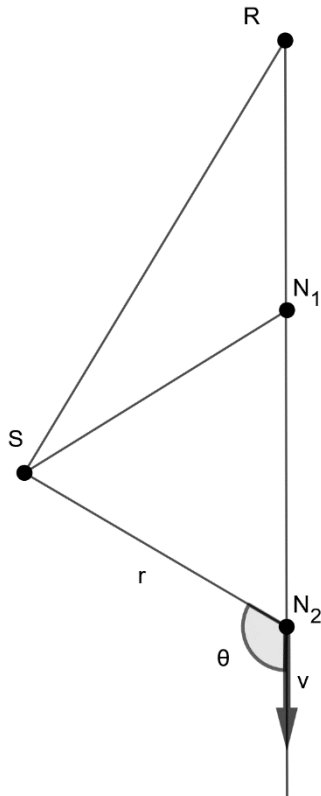
Решение:

А) Пресмятаме радиуса на орбитата около Нихат-23 по III закон на Кеплер

$$r = (MT^2)^{1/3} = 0,20 \text{ au}$$

Радиусът на орбитата е 5 пъти по-малък от земния, затова и паралаксите на звездите ще са 5 пъти по-малки, отколкото, ако ги гледахме от Земята при същото разстояние. Разстоянието до Слънцето в парсеци е:

$$r_{SN} = \frac{0,2}{p_S''} = 16,26 \text{ pc}$$



Взаимното разположение на звездите е показано на чертежа. Точката на есенното равноденствие е нагоре, т.е. координати (0,0) по земното небе са право надолу. Трите звезди трябва да лежат приблизително в равнината на еклиптиката, защото SR и RN₁ са в нея. Еклиптичната дължина на Регул е $\lambda = 149,0^\circ$. Ъгъл R трябва да бъде $180^\circ - \lambda = 31,0^\circ$. Решаваме триъгълника Слънце (S) – Нихат – Регул (R) със синусова и косинусова теореми, но има два варианта, обозначени на чертежа с N₁ и N₂. В единия вариант получаваме разстояние до Регул

$$r_{RN} = RN_1 = 10,44 \text{ au}$$

$$r_{RN} = RN_2 = 31,22 \text{ au}$$

По формулата на Погсън намираме звездната величина:

$$m = 1,40 + 5 \lg \left(\frac{r}{24,3 \text{ pc}} \right)$$

Получаваме възможни отговори $-0,43 \text{ mag}$ и $+1,94 \text{ mag}$.

Еклиптичната дължина на Нихат-23 се явява равна на ъгъл SNR, тъй като направлението Регул-Нихат е успоредно на направлението Слънце – пролетна равноденствена точка. По синусова теорема получаваме възможни стойности $129,7^\circ$ и $50,3^\circ$. Слънцето е на такава екл. дължина 40 дни преди и след лятно слънцестоене, т.е. около 12 май и 31 юли.

От чертежа се вижда, че

$$v_R = -v \cos \theta$$

$$\mu = \frac{v \sin \theta}{r}$$

От синусова теорема в триъгълник S – кораб – фиксирана точка по пътя напред може да се покаже, че

$$\mu = \left(\frac{v}{\text{const}} \right) (\sin \theta)^2$$

В началния момент $\theta_1 = 129,7^\circ$, тъй като от фразирането следва, че лъчевата скорост на Слънцето вече е положителна, т.е. корабът стартира от N₂.

Радиалната скорост се е повишила с 30%, следователно

$$\frac{v_{R2}}{v_{R1}} = \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} = 1,3$$

$$\theta_2 = 146,1^\circ$$

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \left(\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \right)^2 = 0,52$$

Собственото движение на Слънцето се е понижило с 48%.

3т. за зв. величина + 2т. за датите + 3т. за собственото движение = 8т. за А)

Б) Сумата от радиалните скорости на Марина-37 и на далечната звезда, засечени от кораба, винаги дава една и съща стойност. Орбитата на кораба е параболична. Параболичните огледала фокусират успоредни лъчи от безкрайност в точка (фокуса). В случая безкрайните успоредни лъчи идват от далечната звезда, а във фокуса е звездата Марина-37. Ъгълът на падане е равен на ъгъла на отражение при огледалата. В случая това е ъгъл θ между r и v (вж. подусловие А), поради което радиалните компоненти на орбиталното движение на кораба ще са противоположни и ще се допълват до 0. Тогава сумата на радиалните скорости на Марина-37 и далечната звезда няма да се влияе от орбиталното движение на кораба и ще бъде винаги равна на радиалната скорост на далечната звезда спрямо Марина-37.

По параболична орбита около звезда с маса M винаги е изпълнено:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Повдигаме на 4-та степен и получаваме

$$r^2 = \frac{4G^2 M^2}{v^4}$$

Заместваме във формулата за лъчист поток на звездата върху единица площ за наблюдател на кораба:

$$\Phi = \frac{L}{4\pi r^2}$$

$$\Phi = \frac{Lv^4}{16\pi G^2 M^2}$$

$$v = \left(\frac{16\pi G^2 M^2 \Phi}{L} \right)^{1/4}$$

При фиксирана звезда (фиксиране M , L) този израз ни дава как е свързана скоростта по параболична орбита с потока, който звездата създава върху него – пропорционално на $\Phi^{1/4}$.

От момент 1 до момент 2 потокът се повишава с 37%, т.е.

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right)^{1/4} = 1,37^{0,25} = 1,0819$$

От момент 1 до момент 2 скоростта се увеличава с 3,7 km/s, т.е.

$$v_2 = v_1 + 3,7 \text{ km/s}$$

Заместваме и получаваме

$$1,0819v_1 = v_1 + 3,7 \text{ km/s}$$

$$v_1 = 45,2 \text{ km/s}$$

$$v_2 = 48,9 \text{ km/s}$$

Ако в момент 2 лъчистият поток, измерен от кап. Апостолов е бил точно равен на потока Φ_0 , който Слънцето създава на Земята, то:

$$v_2 = \left(\frac{16\pi G^2 M^2 \Phi_0}{L} \right)^{1/4}$$

$$\Phi_0 = \frac{L_{\odot}}{4\pi(1\text{au})^2}$$

Заместваме и получаваме

$$v_2 = \left(\frac{4G^2 M_{\odot}^2 (M/M_{\odot})^2}{(1\text{au})^2 L/L_{\odot}} \right)^{1/4}$$

Обаче

$$\frac{G^2 M_{\odot}^2}{(1\text{au})^2} = v_E^4$$

Където $v_E = 29,8 \text{ km/s}$ е орбиталната скорост на Земята. Заместваме и получаваме

$$\frac{v_2}{v_E} = \left(\frac{4(M/M_{\odot})^2}{L/L_{\odot}} \right)^{1/4}$$

Звездата е от Главната последователност и ще приемем, че

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3,5}$$

Заместваме и получаваме

$$\left(\frac{v_2}{v_E} \right)^4 = \frac{4}{(M/M_{\odot})^{3/2}}$$

$$\left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3/2} = 4 \left(\frac{v_2}{v_E} \right)^{-4}$$

$$\frac{M}{M_{\odot}} = 4^{2/3} \left(\frac{v_2}{v_E} \right)^{-8/3} = 0,67$$

По горната формула за Главна последователност получаваме светимост около 0,2 – 0,3 слънчеви. Звездата вероятно е от спектрален клас K.

В) От условието

$$\sqrt{\frac{GM}{100R}} = 60 \text{ km/s}$$

Разделяме почленно на формулата за кръгова скорост за Земята около Слънцето

$$\sqrt{\frac{GM_{\odot}}{1\text{au}}} = v_E$$

и получаваме

$$\begin{aligned}\frac{M/M_{\odot}}{100R/1\text{au}} &= \left(\frac{60}{29,8}\right)^2 \\ \frac{M/M_{\odot}}{100(R/R_{\odot})(0,696/149,6)} &= \left(\frac{60}{29,8}\right)^2 \\ \frac{(M/M_{\odot})}{(R/R_{\odot})} &= \left(\frac{69,6}{149,6}\right)\left(\frac{60}{29,8}\right)^2 = 1,9\end{aligned}$$

Такова отношение маса:радиус не е типична за Главната последователност, където обикновено е около 1 или по-малко, както и за почти всички гиганти. За да има голяма маса, но малък радиус, звездата вероятно е изхвърлила външните си слоеве със звезден вятър. Това се случва при Волф-Райе звездите, които имат звезден вятър със скорост от хиляди километри в секунда, което би било опасно за апаратурата на кораба.

Задача 3. Двойна екзопланета. Около звезда от спектрален клас K5 се движи двойна планета на 0.4 астрономически единици от звездата. Звездата има светимост $L = 0,15L_S$, където L_S е светимостта на Слънцето, ефективна температура $T = 4350\text{K}$ и маса $M = 0,67M_S$, където M_S е масата на Слънцето.

Двойната планета се състои от планета подобна на Уран с маса $M = 15M_E$, където M_E е масата на Земята, и радиус $R = 25500 \text{ km}$, и по-малка планета, подобна на Земята, която обикаля около голямата планета за $12^{\text{d}} 02^{\text{h}} 17^{\text{m}} 10^{\text{s}}$. Равнината на орбитата на по-малката планета лежи в равнината на орбитата на голямата планета около звездата. Пасажите са централни.

А) Когато започва първият наблюдаван пасаж на двойната планетата по диска на звездата по-малката планета е точно на орбитата на голямата планета, като я изпреварва и навлиза първа върху диска на звездата. Нека началото на този пасаж се случва във време $T = 0^{\text{h}} \text{ UT}$. Нарисувайте къде върху диска на звездата ще се проектират двете планети след 5 часа. Приемете, че по време на пасажа взаимното разположение на планетите не се променя. Кога ще приключи пасажа. [6т.]

Б) Определете с колко се променя потока от звездата по време на пасажа, като нарисувате схематично как изглежда кривата на блясъка в единици на поток, в подходящ

мащаб. Обозначете върху рисунката амплитудата на кривата в моментите на промяна на потока. [4т.]

Приемете, че вашият приемник на светлина може да отчита промени от една десетохилядна от потока.

В) Кога при следващия пасаж голямата планета ще се намира в центъра на диска на звездата. Нарисувайте проекцията на двете планети върху диска на звездата в този момент, като работите с възможно най-голяма точност. [5т.]

Представяйте времената с точност до секунда.

Всички орбити са кръгови и лъчът на зрение лежи в тяхната равнина.

Упътване: Работете с голяма точност, но където е възможно използвайте подходящи приближения, които няма да променят съществено крайния резултат.

Справочни данни:

Астрономическа единица – 149597870,700 km

Гравитационна константа – $6,67430 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

Маса на Слънцето – $1,988475 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Ефективна температура на Слънцето – 5772 K

Радиус на Слънцето – 695700 km

Маса на Земята – $5,97217 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Среден радиус на Земята – 6371,0 km

Продължителност на сидеричната година – 365,256363^d

Решение:

Нека определим радиуса на звездата. Ще използваме закона на Стефан-Болцман като сравним параметрите на звездата с тези на Слънцето:

$$\frac{R_{st}}{R_S} = \left(\frac{T_S}{T} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{L}{L_S}} = 0,6819$$

$$R_{st} = 0,6819 \cdot R_S = 474397 \text{ km}$$

От третия закон на Кеплер в съкратен вид намираме периода на планетата около звездата. Тук пренебрегваме масите на планетите, защото те са на 5 порядъка по-малки от масите на звездите:

$$\left(\frac{T_{pl}}{T_E} \right)^2 = \left(\frac{a_{pl}}{a_E} \right)^3 \cdot \frac{M_S}{M} = 0,09552$$

$$T_{pl} = 0,3090 \cdot T_E = 112,889^d$$

Да определим линейната скорост на планетата по нейната орбита:

$$v_{pl} = \frac{2\pi a_{pl}}{T_{pl}} = \frac{2\pi 0,4 a_E}{T_{pl}} = \frac{2\pi 0,4 \cdot 1 \text{ au}}{T_{pl}} = 38,548 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Времето за което планетата изминава диаметъра на диска на звездата е:

$$t_{st} = \frac{2R_{st}}{v_{pl}} = 24613,5^s = 6^h 50^m 13^s$$

Времето за което планетата изминава диаметъра на голямата планета е:

$$t_{pl} = \frac{2R_{pl}}{v_{pl}} = 1323^s = 22^m 03^s$$

Времето за което планетата изминава диаметъра на малката планета е:

$$t_{pl2} = \frac{2R_E}{v_{pl}} = 330,55^s = 5^m 30,55^s$$

Нека да определим радиуса на относителната орбита на малката планета около голямата:

$$a_{pl2} = \left[T_{pl2}^2 \cdot \frac{G(M_{pl} + M_E)}{4\pi^2} \right]^{\frac{1}{3}} = 560856,66 \text{ km}$$

Времето за което планетата би изминала разстоянието между двете планети е:

$$t_{12} = \frac{a_{pl2}}{v_{pl}} = 14549,6^s = 4^h 02^m 29,6^s$$

Продължителността на пълния пасаж на двойната планета е:

$$t_{pas} = t_{st} + t_{12} + \frac{1}{2}(t_{pl2} + t_{pl}) = 11^h 06^m 29,37^s$$

Следователно пасажът на двете планети ще приключи в $11^h 06^m 29,37^s$ часа.

За 5 часа планетата ще измине по диска на звездата разстояние l_5 :

$$\frac{l_5}{D_{st}} = \frac{5^h}{t_{st}} = \frac{5}{6,8370} \text{ и следователно } l_5 = 0,731321 D_{st} \approx 0,73 D_{st}$$

Малката планета ще подмине средата на диска на звездата и ще доближи западния край на диска. За да получим положението на центъра на планетата това разстояние трябва да се намали с радиуса на малката планета защото в началото тя изцяло е извън диска на звездата:

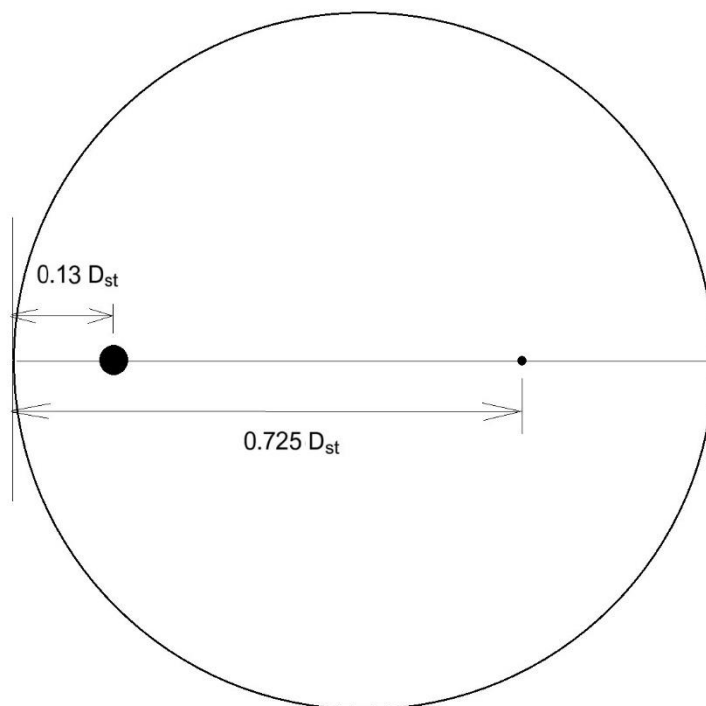
$$l'_5 = l_5 - \frac{R_E}{D_{st}} = 0,724606 D_{st} \approx 0,725 D_{st}$$

Голямата планета ще следва по малката със закъснение от време t_{12} . Аналогично на последната сметка, получаваме че то съответства на разстояние l_{12} равно на 0.5911 от диаметъра на диска на звездата:

$$\frac{l_{12}}{D_{st}} = \frac{t_{12}}{t_{st}} = \frac{4^h 02^m 29,6^s}{6,8370^h} \Rightarrow l_{12} = 0,5911 D_{st} \approx 0,59 D_{st}$$

Разстоянието на голямата планета от началото на диска е $l_1 = l'_5 - l_{12} = 0,13 D_{st}$

Построяваме видимия диск на звездата и нанасяме положенията на планетите върху диска. *Размерите на изображенията на планетите не са съобразени с размерите на диска на звездата.*



Потокът светлина от звездата се променя поради това, че планетите засенчват част от нея, когато преминават пред диска на звездата. Степента на засенчване се определя от отношението на площта на диска на планетата към площта на диска на звездата. Това отношение е пропорционално на отношението на квадратите на радиусите. В случая на двойна планета ще има три степени на понижение на блясъка – при пасаж на малката планета, при пасаж на голямата планета и при пасаж на двете планети. Да определим каква част от светлината се засенчва при всеки от тези случаи:

При пасаж на малката планета:

$$\Delta\varphi_{pl2} = \frac{S_{pl2}}{S_{st}} = \frac{R_E^2}{R_{st}^2} = (0,01343)^2 = 1,8036 \cdot 10^{-4} \approx 1,8 \cdot 10^{-4}$$

Амплитудата на кривата на блясъка е само около 2 десетохилядни от потока.

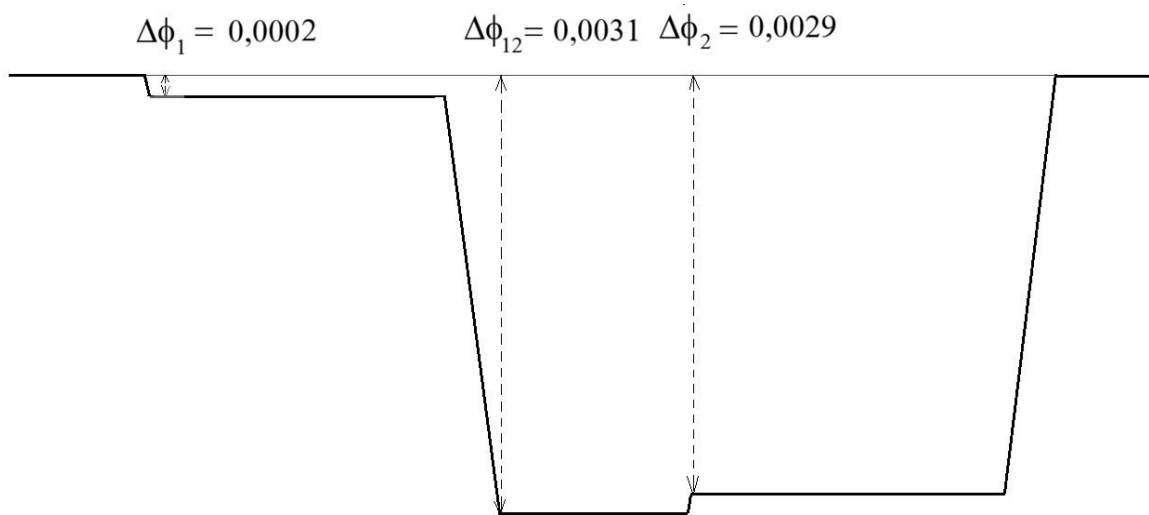
При пасаж на голямата планета:

$$\Delta\varphi_{pl} = \frac{S_{pl}}{S_{st}} = \frac{R_{pl}^2}{R_{st}^2} = (0,0537186)^2 = 2,88569 \cdot 10^{-3} \approx 2,9 \cdot 10^{-3}$$

Амплитудата на кривата на блясъка е около 3 хилядни от потока.

При пасаж на двете планети върху диска на звездата:

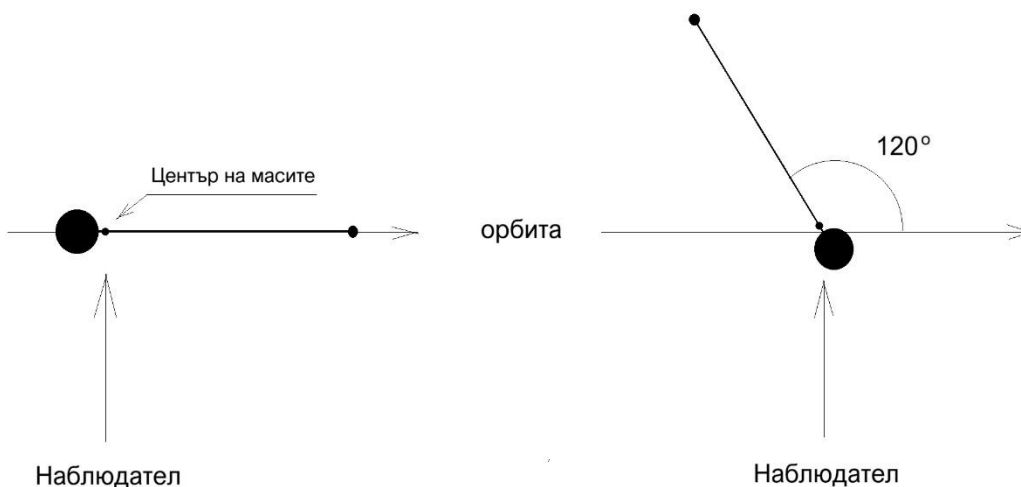
$$\Delta\varphi_{12} = \frac{S_{pl} + S_{pl2}}{S_{st}} = \frac{R_{pl}^2 + R_{pl2}^2}{R_{st}^2} = 3,066044 \cdot 10^{-3} \approx 3,1 \cdot 10^{-3}$$



Ние наблюдаваме двойна планета едната от които е 15 пъти по-тежка от другата. Това, което се движи по орбита около звездата с период T_{pl} , е центърът на масите на планетите, докато те обикалят около него с период $T_{pl2} = 12^d 02^h 17^m 10^s$. Разположението на планетите по диска на звездата зависи в каква фаза са планетите в своето орбитално движение около общия център на масите. Нека да проверим как са ориентирани планетите след точно една обиколка около звездата. За целта разделяме периода на обикаляне на планетите около звездата на периода на обикаляне на планетите около общия център на масите:

$$\frac{T_{pl}}{T_{pl2}} = \frac{112,889^d}{12,095255^d} = 9,33333$$

Оттук следва, че след един орбитален период около звездата планетите са извършили 9 обиколки и една трета, около центъра на масите. В началото ориентацията на планетите бе в направление перпендикулярно на лъча на зрение. Сега линията, която ги свързва, се е завъртяла на 120° относно началната ориентация.



В началния момент голямата планета и центъра на масите са извън диска на звездата. Център на масите се намира от голямата планета на $1/16$ от разстоянието между планетите. При втората конфигурация проекцията на центъра на масите се намира на половината от това разстояние поради това, че линията свързваща планетите сключва с лъча на зрение ъгъл равен на 30° .

Центърът на масите отстои от голямата планета на времеви интервал:

$$\Delta t_{mc} = \frac{t_{12}}{16} = 0,252597^h = 0^h 15^m 09,35^s$$

При ъгъл 30° , относно лъча на зрение, това време намалява два пъти.

Следователно, освен пълен оборот около звездата, има допълнително време за да застане центърът на масите в такава позиция, че голямата планета да е в центъра на диска на звездата. Преместването на центъра на масите в правилната позиция изисква той да измине допълнително разстояние за интервал време:

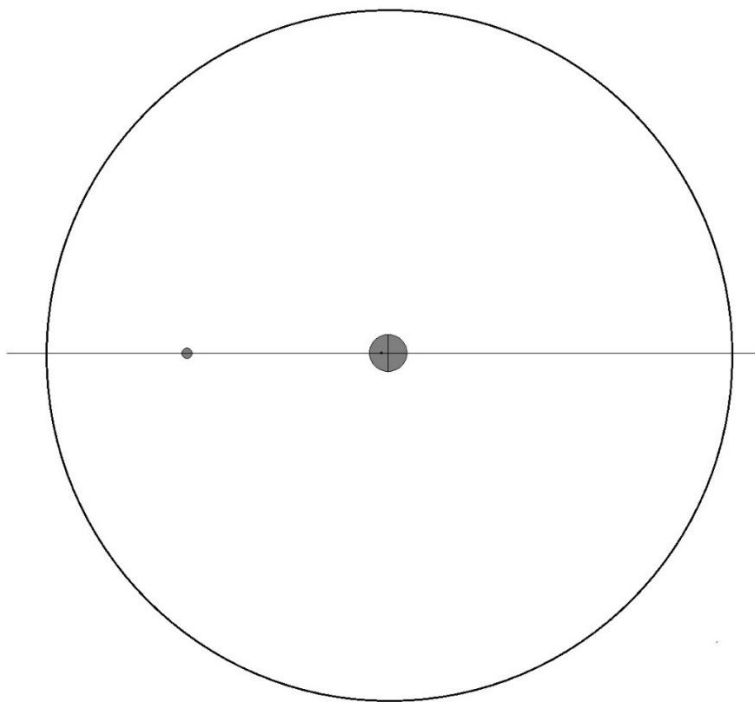
$$\Delta t = t_{12} - \Delta t_{mc} + \frac{t_{pl2}}{2} + \frac{t_{st}}{2} - \frac{\Delta t_{mc}}{2}$$

$$\Delta t = t_{12} + \frac{t_{pl2}}{2} + \frac{t_{st}}{2} - \frac{3\Delta t_{mc}}{2} = 7,137040^h = 0,2973766^d$$

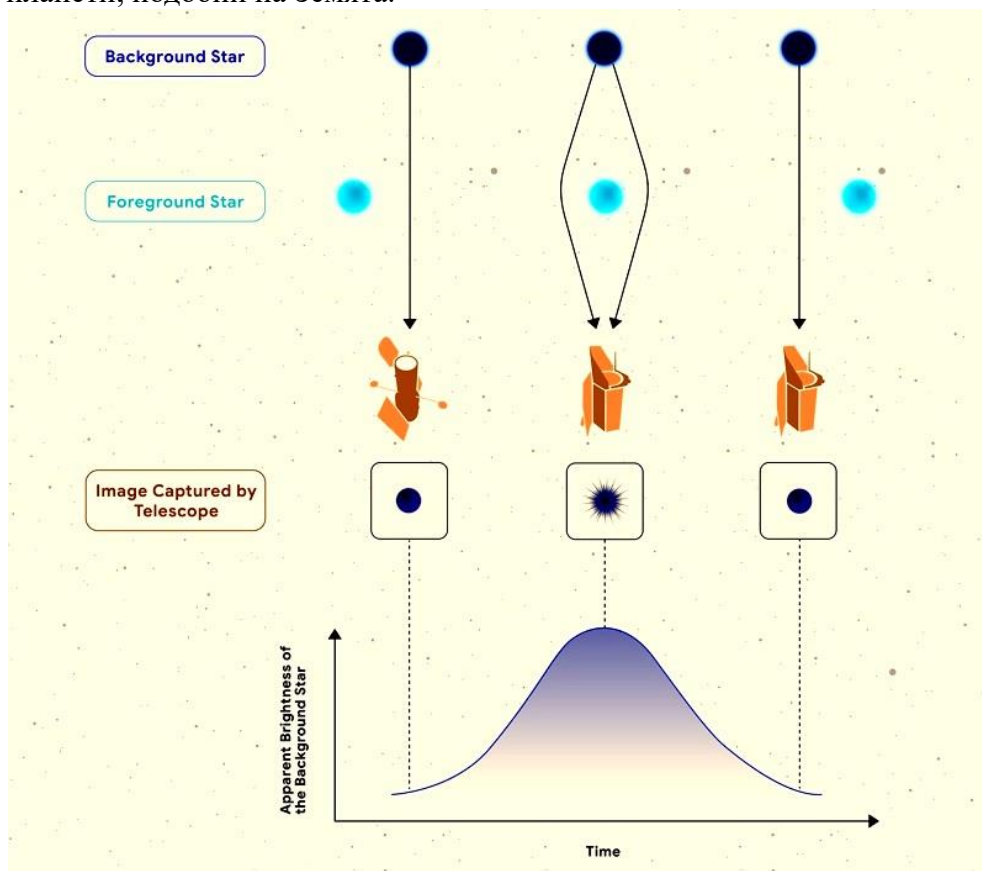
За времето, когато голямата планета ще застане в центъра на диска на звездата, след един оборот около нея, получаваме:

$$t_{pl} + \Delta t = 112,889 + 0,2973766 = 113,1864^d = 113^d 4^h 28^m 25^s$$

Проекцията на разстоянието между планетите е два пъти по-малка от самото разстояние и отношението на отстоянието ѝ от центъра на диска към радиуса на диска е равно на отношението $t_{12}/t_{st} = 0,59$. Тогава планетите ще се виждат от наблюдателя пред диска на звездата по следния начин:



Задача 4. Гравитационна микролеца. Едно от следствията от Общата теория на относителността е, че масата закривява пространството и светлината пътува по най-краткия път през това огънато пространство. Ако на пътя между наблюдател и далечна звезда премине малка звезда или кафяво джудже (леца), това ще накара светлинните лъчи от далечния обект да се закривят и по-голяма част от тях да достигнат наблюдателя, водейки до повишение в блясъка. Това явление се нарича гравитационна микролеца. В случай, че около звездата-леца има планета, е възможно тя също да се озове по лъча на зрение между наблюдателя и задната звезда, създавайки втори, по-малък пик в кривата на блясъка. Този метод е третият най-разпространен за откриване на екзопланети, като към момента броят на регистрираните чрез него екзопланети е 278. Едно от най-големите му предимства е, че при него селективният ефект към по-големи маси не е толкова изразен, позволявайки да се откриват планети, подобни на Земята.

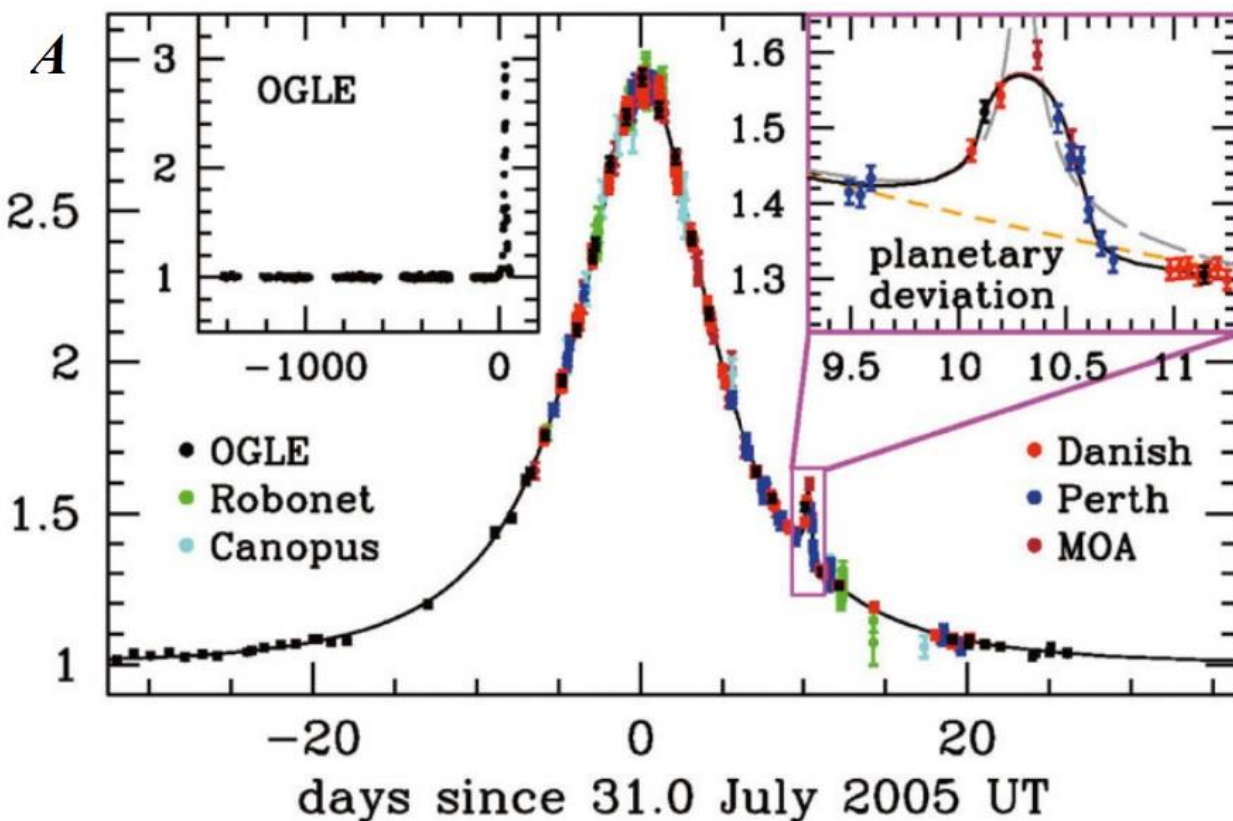


Дадена ви е крива на блясъка на непроменлива звезда на заден фон, пред която преминава такава звезда-леца, кръстена OGLE-2005-BLG-390L с координати $\alpha = 17^{\text{h}}54^{\text{m}}19.2^{\text{s}}$ и $\delta = -30^{\circ}22'38''$, на 6,6 крс от нас. Наблюдаваният втори, малък пик (увеличен горе вдясно на фигурата) е породен от планета, за която се предполага, че обикаля около звездата-леца по кръгова орбита с радиус 2,6 au с орбитален период 3500 d. Приемете, че по време на събитието планетата е близо до квадратура (т.е. направлението звезда-планета е перпендикулярно на зрителния лъч).

Обикновено от Земята наблюдаваме промяна на яркостта на точков източник при микролециите. Ако имаме техника с извънредно висока разделителна способност, щяхме да засечем как допълнителната светлина идва предимно от т.нар. „пръстен на Айнщайн“ –

малък кръг, проектиран около лещата. Ако d_S и d_L са разстоянията до източника и до лещата, то формулата за ъгловия радиус на пръстена на Айнщайн е:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM(d_S - d_L)}{c^2 d_S d_L}}$$



А) Факторът на увеличение A дава с колко пъти се повишава наблюдаваният поток благодарение на лещата спрямо базовия поток (без леща). Ако положим $u = \delta/\theta_E$, където δ е ъгловото разстояние между лещата и източника, то можем да използваме приближението

$$A = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}}$$

Това приближение обикновено не дава добри резултати за зоната на кривата на блясъка около пика, тъй като ъгловите размери на обектите, а и фитирането на данните оказват влияние. Въпреки това, то може успешно да бъде използвано за основата на повишението по кривата на блясъка (т.е. за крилата). Използвайки горната формула, пресметнете колко радиуса на Айнщайн е ъгловото разстояние между лещата и източника, когато лъчистият поток е усилен с 10%. [2г.]

Б) Измерете времевите интервали, за които звездата-леща и планетата-леща повишават блясъка с над 10%. [2т.]

В) Използвайте съображенията и резултатите в подусловия **А)** и **Б)**, за да пресметнете масата на планетата в земни маси. [5т.]

По масата на лещата се предполага, че тя е М4-джудже с фотосферна температура 3210 K и радиус 0,275 слънчеви радиуса.

Г) Ако допуснем, че Бонд-албедото на планетата е 50%, пресметнете средната температура на повърхността ѝ. [3т.]

Д) Светлината от лещата е пренебрежима спрямо светлината от източника и се губи в нея. Нека проверим дали бихме могли да засечем толкова слаб обект, ако източникът не съществуваше. Ако лещата е М4-джудже, най-удобният филтър, в който да се опитаме да го засечем, е филтър К. Защо е така? Във филтър К екстинкцията на звездите в галактичния център е 3,0 mag. За спектрален клас М4V болометричната корекция във филтър К е $BC_K = 2,74$. Пресметнете видимата звездна величина на звездата-леща във филтър К. [4т.]

Е) Има около 4% вероятност лещата да не е М4-звезда, а бяло джудже. Ако е така, то дали К е най-подходящият филтър, в който да се опитаме да засечем светлината от лещата. Ако не К, то кой? [2т.]

Справочни данни:

Гравитационна константа: $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

Маса на Слънцето: $1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Ефективна температура на Слънцето: 5772 K

Радиус на Слънцето: 696000 km

Маса на Земята: $5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Абсолютна болометрична звездна величина на Слънцето: 4,75 mag

Решение:

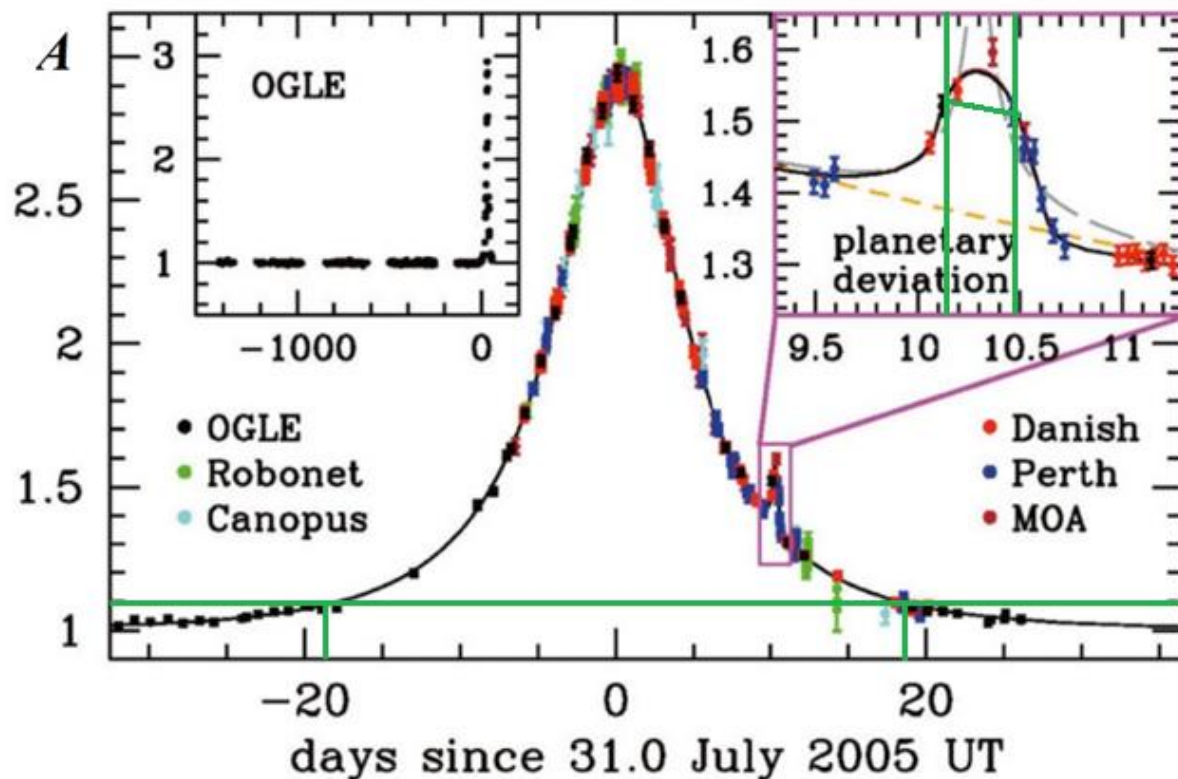
А) Повишението на потока е 10%, т.е. амплификацията е 1,1. Решаваме за u :

$$A = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}} = 1,1$$

Получаваме $u = 1,67$, т.е. когато ъгловото разстояние между източника и лещата е 1,67 радиуса на Айнщайн, блясъкът е повишен с 10% над базовия. [2т.]

Б) Измерваме времеви интервал, за който звездата-леща повишава блясъка с 10% като пресечем кривата с $A = 1,1$. Получаваме $t_1 = 37 \text{ d}$.

Измерваме времеви интервал, за който планетата-леща повишава блясъка с 10% като горе вдясно засечем моментите, в които A е повишено над пунктираната линия с 0,14 (тъй като базовото ниво е около 1,4 заради звездата-леща). Получаваме $t_2 = 0,37 \text{ d}$. [2т.]



В) В израза за ъгловия размер на радиуса на Айнщайн всички разстояния са еднакви за звездата-леца и за планетата-леца

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM(d_S - d_L)}{c^2 d_S d_L}}$$

Оттук, ако ги сравним с почленно разделяне на горната формула, получаваме

$$M \propto \theta^2$$

Тъй като събитието е близо до квадратура, орбиталната скорост на планетата има пренебрежим принос към тангенциалната скорост и към ъгловата скорост по небето. Следователно, ъгловите скорости на планетата-леца и на звездата леца са практически равни. Тъй като

$$\theta = \omega t$$

Следва че

$$\theta \propto t$$

и

$$M \propto t^2$$

Така, записваме

$$\frac{M_P}{M_S} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2$$

Масата на звездата намираме от III Закон на Кеплер в ас, ут и сл. маси:

$$M_S = \frac{r^3}{T^2} = 0,19M_{\odot}$$

Пресмятаме и получаваме $M_P = 6,3M_E$.

[5т.]

Приетата стойност е много близка: около 5,5 земни маси.

Г) Ако планетата е с радиус R_P , проекцията на площта, с която поема лъчите от звездата е πR_P^2 , а $(1-A)$ е частта от лъчистата енергия, която задържа и използва за поддържане на термодинамично равновесие. Мощността на топлинното ѝ лъчение трябва да е

$$P = \frac{L}{4\pi r_P^2} (1 - A) \pi R_P^2$$

От закона на Стефан-Болцман

$$P = 4\pi R_P^2 \sigma T_P^4$$

$$L = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$$

Заместваме и получаваме

$$4\pi R_P^2 \sigma T_P^4 = \frac{4\pi R_S^2 \sigma T_S^4}{4\pi r_P^2} (1 - A) \pi R_P^2$$

$$T_P^4 = \frac{R_S^2 T_S^4}{4r_P^2} (1 - A)$$

$$T_P = T_S \left(\frac{(1 - A) R_S^2}{4 r_P^2} \right)^{1/4} = 42 \text{ K} = -231^\circ\text{C}$$

[3т.]

Д) По закона на Стефан-Болцман пресмятаме светимостта на звездата-леща в слънчеви светимости:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}} \right)^4 = 0,00724$$

По формулата на Погсън пресмятаме абсолютната болометрична звездна величина като сравняваме със Слънцето

$$M = 4,75 - 2,5 \lg \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) = 10,10$$

Прилагайки болометричната корекция за К, получаваме абсолютна звездна величина във филтъра $M_K = 10,10 - 2,74 = 7,36 \text{ mag}$.

От координатите е видимо, че звездата е в посока, близка до галактичния център, но малко по-близо: на 6,6 крс, докато той е на 8,2 крс. Приемайки, че екстинкцията е пропорционална на разстоянието в дадена посока, екстинкцията на звездата би била $A_K = (3,0 \text{ mag})(6,6/8,2) = 2,41 \text{ mag}$. Пресмятаме видимата звездна величина в К:

$$m = M + 5 \lg d_L - 5 + A_K = 23,9 \text{ mag}$$

Такава звездна величина може да се достигне с много големи телескопи в оптични филтри, но е много трудно да се достигне в К-филтър на 2,2 микрона, където фонът на небето е висок. Все пак, К е най-подходящият филтър за целта, тъй като е най-дълговълновият широко използван стандартен филтър в близкия инфрачервен диапазон. В оптични филтри, където междузвездната екстинкция е по-голяма, звездната величина би била над 30 mag. Това, че звездата е хладна и излъчва по-силно в инфрачервения диапазон, също е фактор.

[4т.]

Е) Белите джуджета са по-горещи и излъчват много по-силно в оптичния диапазон. Обаче на такова голямо разстояние в посока към центъра на галактиката лъчите претърпяват толкова силна селективна екстинкция (почервяване), че К отново би бил най-подходящият филтър.

[2т.]