

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ОБЛАСТЕН КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО ФИЗИКА

15 февруари 2026 г.

Тема за IX клас (трета състезателна група)

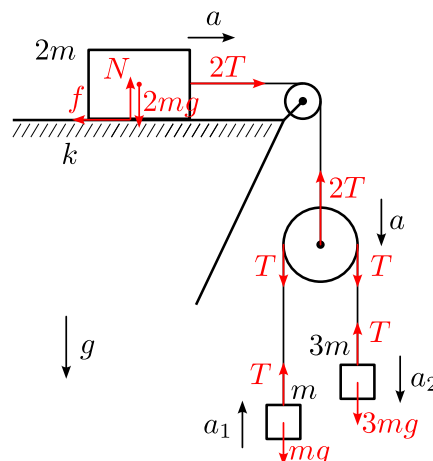
Примерни решения и указания

Решение на зад. 1 – Трупчето и макари

- а) Понеже триенето е достатъчно, че трупчето да не се движи, то макрата също е неподвижна. Тогава очевидно $a_1 = a_2 = a_{12}$ (1 т.). Нека силата на опън на нишката е T . Записваме втория закон на Нютон за всяка теглилка

$$\left| \begin{array}{l} ma_1 = T - mg \\ 3ma_2 = 3mg - T \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} ma_{12} = T - mg \\ 3ma_{12} = 3mg - T \end{array} \right. \quad (1 \text{ т.})$$

$$\Rightarrow a_{12} = a_1 = a_2 = \frac{1}{2}g = 5 \text{ m/s}^2 \quad (2 \text{ т.})$$



- б) На висящата макара действат 3 сили – 2 сили на опън T на прехвърлената през нея нишка и една сила на опън на нишката, от която виси макарата. Понеже макарата е лека, то сумата от силите, които и действат трябва да е 0, откъдето следва, че силата на опън на нишката, от която виси макарата, е $2T$. (0.5 т.)

На трупчето действат 2 сили – силата на опън $2T$ на закачената за него нишка и силата на триене f . Понеже трупчето е в равновесие, то $f = 2T$. (0.5 т.) От закона на Кулон-Амонтон следва $f \leq kN$, където N е нормалната реакция на опората, за която $N = 2mg$. (0.5 т.) Оттук $k \geq k_{\min} = T/(mg)$.

От предната подточка имаме $T = \frac{3}{2}mg$ и тогава

$$\Rightarrow k_{\min} = \frac{3}{2} \quad (0.5 \text{ т.})$$

- в) От условието имаме $k = 3/4$. Понеже тук триенето не е достатъчно, че да задържи неподвижно трупчето, то ще има триене при хлъзгане и следователно $f = kN = \frac{3}{2}mg$. Записваме вторият закон на Нютон за всяко тяло в задачата (двете теглилки и трупчето):

$$\left| \begin{array}{l} ma_1 = T - mg \\ 3ma_2 = 3mg - T \\ 2ma = 2T - \frac{3}{2}mg \end{array} \right. \quad (1 \text{ т.})$$

Това са 3 уравнения с 4 неизвестни (a, a_1, a_2, T) – нужно е още едно уравнение. Това е кинематичната връзка между ускоренията a, a_1, a_2 , която е следствие от неразтегливостта на нишката свързваща двете теглилки.

От лявата страна на висящата макара, нишката се скъсява с ускорение $a + a_1$, а от дясната нишката се удължава с ускорение $a_2 - a$. Но нишката е неразтеглива и следователно нейната дължина не може да се променя, т.е. с колкото се скъсява едната страна, с толкова трябва да се удължава другата $\Rightarrow a_1 + a = a_2 - a$ (1 т.).

Така се получава системата

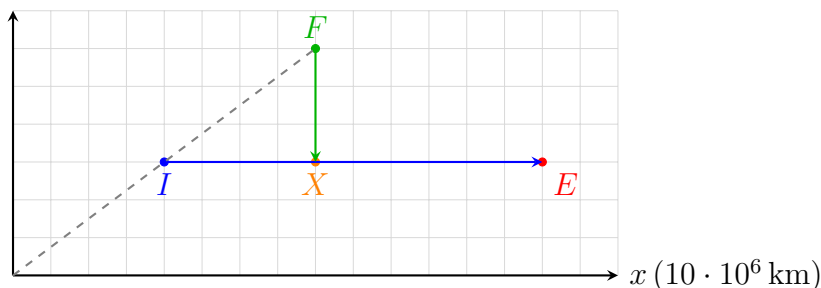
$$\begin{cases} T - mg = ma_1 \\ 3mg - T = 3ma_2 \\ 2T - \frac{3}{2}mg = 2ma \\ 2a + a_1 - a_2 = 0 \end{cases}$$

Откъдето

$$a_1 = \frac{1}{20}g = 0.5 \text{ m/s}^2 \quad a_2 = \frac{13}{20}g = 6.5 \text{ m/s}^2 \quad a = \frac{3}{10}g = 3 \text{ m/s}^2 \quad (2 \text{ т.})$$

Решение на зад. 2 – Междувъзвездни войни

$y (10 \cdot 10^6 \text{ km})$



- а) Имперският флот започва движението си от покой. До моментът на спиране на двигателите, флотът ще е изминал разстояние $\frac{1}{2}a\tau^2$ **(0.25 т.)** и вече ще се движи със скорост $v = a\tau$ **(0.25 т.)**. Тогава, понеже $IE = 100 \cdot 10^6 \text{ km}$, то

$$IE = \frac{1}{2}a\tau^2 + (a\tau)(T - \tau) \quad (0.5 \text{ т.}) \Rightarrow T = \frac{1}{2}\tau + \frac{IE}{a\tau} = 12 \cdot 10^5 \text{ s} \quad (0.5 \text{ т.})$$

- б) За времето Δt_1 шпионинът изминава разстоянието IF от началното положение на имперския флот до земния флот. Тогава $\Delta t_1 = IF/v_k = IF \cdot 10^{-5} \text{ s/m}$ **(0.5 т.)**. Така

$$\Delta t_1 = \sqrt{(80 - 40)^2 + (60 - 30)^2} \cdot 10^6 \text{ km} \cdot 10^{-5} \text{ s/m} \Rightarrow \Delta t_1 = 5 \cdot 10^5 \text{ s} \quad (0.5 \text{ т.})$$

- в) За времето $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^5 \text{ s} > \tau = 4 \cdot 10^5 \text{ s}$, имперската флотилия вече е приключила своето ускорение и се е движילה време $\Delta t_1 - \tau$ с постоянна скорост $a\tau$ **(0.5 т.)**. В такъв случай, до момента, в който земната флота разбират за атаката, имперската флота ще е изминала разстояние $\frac{1}{2}a\tau^2 + a\tau(\Delta t_1 - \tau) = a\tau\Delta t_1 - \frac{1}{2}a\tau^2$ **(0.5 т.)**. Тоест ще се намира в точка с координати

$$\frac{1}{2}a\tau(2\Delta t_1 - \tau) = 30 \cdot 10^6 \text{ km} \Rightarrow (x_1, y_1) \equiv (70, 30) \quad (0.5 \text{ т.})$$

- г) От момента на тръгване на Земния флот, на имперския флот му остава да измине още $(80 - x_1) \cdot 10^6 \text{ km} = 10 \cdot 10^6 \text{ km}$ до планетата X . Те се движат със скорост $a\tau = 10^5 \text{ m/s}$ и следователно им остава $(80 - x_1) \cdot 10^6 \text{ km} / (a\tau) = 10^5 \text{ s}$ до X **(0.5 т.)**. За това време земната флотилия трябва да достигне X , т.е. да измине разстояние $FX = 30 \cdot 10^6 \text{ km}$. Понеже започва от покой и се движи с ускорение a' , то

$$\frac{1}{2}a' \left(\frac{(80 - x_1) \cdot 10^6 \text{ km}}{a\tau} \right)^2 = FX \quad (0.5 \text{ т.}) \Rightarrow a' = \frac{2(FX)a^2\tau^2}{((80 - x_1) \cdot 10^6 \text{ km})^2} = 6 \text{ m/s}^2 \quad (0.5 \text{ т.})$$

д) За време $\tau' = 7.5 \cdot 10^4$ s земният флот изминава разстояние

$$a'\tau'^2/2 = 16.875 \cdot 10^6 \text{ km} < FX = 30 \cdot 10^6 \text{ km} \quad (\mathbf{0.25 \text{ т.}})$$

През останалата част от пътя флотът се движи с постоянна скорост $a'\tau'$ (**0.25 т.**). В такъв случай земната флота изминава разстоянието до X за време T' , за което

$$\frac{1}{2}a'\tau'^2 + a'\tau'(T' - \tau') = FX \quad (\mathbf{0.5 \text{ т.}}) \Rightarrow T' = \frac{1}{2}\tau' + \frac{FX}{a'\tau'}$$

В такъв случай, за времето Δt_2 имаме:

$$\Delta t_2 = T' - \frac{(80 - x_1) \cdot 10^6 \text{ km}}{a\tau} = \frac{1}{2}\tau' + \frac{FX}{a'\tau'} - \frac{(80 - x_1) \cdot 10^6 \text{ km}}{a\tau} = \frac{10^5}{24} \text{ s} \approx 4170 \text{ s} \quad (\mathbf{0.5 \text{ т.}})$$

е) Нека $x(t)$ е x -координатата на имперската флота, а $y(t)$ е y -координатата на земната флота. Тогава разстоянието $r(t)$ между двете е:

$$r^2(t) = (80 - x(t))^2 + (y(t) - 30)^2 \quad (\mathbf{0.25 \text{ т.}})$$

Нека за улеснение положим, че $t = 0$, когато земната флота пристига при планета X . Тогава

$$x(t) = 80 + a\tau(t + \Delta t_2) \quad (\mathbf{0.5 \text{ т.}}) \quad y(t) = 30 - a'\tau't \quad (\mathbf{0.5 \text{ т.}})$$

И съответно

$$r^2(t) = a^2\tau^2(t + \Delta t_2)^2 + a'^2\tau'^2t^2 = (a^2\tau^2 + a'^2\tau'^2)t^2 + 2\Delta t_2 a^2\tau^2t + a^2\tau^2\Delta t_2^2$$

След отделяне на точен квардат се получава

$$r^2(t) = \left(\sqrt{a^2\tau^2 + a'^2\tau'^2}t + \frac{a^2\tau^2\Delta t_2}{\sqrt{a^2\tau^2 + a'^2\tau'^2}} \right)^2 + a^2\tau^2\Delta t_2^2 \left(1 - \frac{a^2\tau^2}{a^2\tau^2 + a'^2\tau'^2} \right)$$

$$r(t) = \sqrt{\left(\sqrt{a^2\tau^2 + a'^2\tau'^2}t + \frac{a^2\tau^2\Delta t_2}{\sqrt{a^2\tau^2 + a'^2\tau'^2}} \right)^2 + \frac{a^2\tau^2a'^2\tau'^2\Delta t_2^2}{a^2\tau^2 + a'^2\tau'^2}}$$

Откъдето се получава

$$r_{\min} = \frac{a\tau a'\tau'\Delta t_2}{\sqrt{a^2\tau^2 + a'^2\tau'^2}} = \frac{\Delta t_2}{\sqrt{(a\tau)^{-2} + (a'\tau')^{-2}}} \quad (\mathbf{1 \text{ т.}})$$

$$r_{\min} = \frac{10^5 \text{ s}}{24\sqrt{1^{-2} + 4.5^{-2}} \cdot 10^{-5} \text{ s/m}} \approx 0.4 \cdot 10^6 \text{ km} \quad (\mathbf{0.5 \text{ т.}})$$

Както е видно $r_{\min} < R = 0.5 \cdot 10^6 \text{ km}$, откъдето следва, че земната флотилия ще може да прихване и унищожи имперската, т.е. Земята е в безопасност... засега. (**0.25 т.**)

Решение на зад. 3 – Последен полет с балон

- а) Общата маса на балона е $M + 2m + \rho_h V$. На балона му действа Архимедова сила $\rho_0 V g$ **(0.25 т.)** нагоре, силата на опън на въжето T и силата на тежестта $(M + 2m + \rho_h V)g$ **(0.25 т.)** надолу. Понеже балонът е в равновесие **(0.25 т.)**:

$$T = \rho_0 V g - (M + 2m + \rho_h V)g \text{ (0.25 т.)} \Rightarrow \boxed{T = ((\rho_0 - \rho_h)V - M - 2m)g} \text{ (0.5 т.)}$$

Или:

$$T = ((1.2 - 1.0) \cdot 3 \cdot 10^3 - 400 - 2 \cdot 70) \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow \boxed{T = 600 \text{ N}} \text{ (0.5 т.)}$$

- б) След срязването на въжето, на балонът действа некомпенсирана сила нагоре, която води до ускорение a . Като от втория закон на Нютон следва

$$(M + 2m + \rho_h V)a = \rho_0 V g - (M + 2m + \rho_h V)g \text{ (0.5 т.)} \Rightarrow a = \left(\frac{\rho_0}{\rho_h + \frac{M+2m}{V}} - 1 \right) g \text{ (0.5 т.)}$$

Това означава, че целият балон започва да се издига нагоре с ускорение a , включително и пилотът Алекс. Силата, която го ускорява нагоре е нормалната реакция на опората N' , т.е. на кантара. Тогава отново от втория принцип:

$$ma = N' - mg \Rightarrow N' = m(a + g) \text{ (0.5 т.)}$$

От друга страна, показанието на кантара е $m' = N'/g$ **(0.5 т.)**, откъдето

$$m' = \left(1 + \frac{a}{g} \right) m \Rightarrow \boxed{m' = \frac{\rho_0}{\rho_h + \frac{M+2m}{V}} m} \text{ (0.5 т.)}$$

или

$$m' = \frac{1.2}{1.0 + \frac{400+2 \cdot 70}{3000}} \cdot 70 \text{ kg} \Rightarrow \boxed{m' \approx 71.2 \text{ kg}} \text{ (0.5 т.)}$$

- в) Балонът ще спре да се издига, когато плътността на въздуха ρ се изравни със средната плътност на балона. Еквивалентно, когато Архимедовата сила се изравни със силата на тежестта на балона. **(1 т.)**

Така имаме:

$$\rho V = M + 2m + \rho_h V \text{ (0.5 т.)} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\rho_h}{\rho_0} + \frac{M + 2m}{\rho_0 V} = \frac{1.0}{1.2} + \frac{400 + 2 \cdot 70}{1.2 \cdot 3000} \approx 0.983 \text{ (0.5 т.)}$$

От графиката се получава $\boxed{H \approx 160 \text{ m}}$. **(1 т.)**

(за $H \in [150, 170] \text{ m}$ – **(0.5 т.)**; за $H < 150 \text{ m}$ или $H > 170 \text{ m}$ – **(0 т.)**)

- г) След скока на Алекс, пълната маса на балона е вече $M + m + \rho_h V$ **(0.5 т.)**, откъдето новата височина е при плътност на въздуха от

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\rho_h}{\rho_0} + \frac{M + m}{\rho_0 V} \approx 0.964 \text{ (0.5 т.)}$$

Отново от графиката се получава $\boxed{H' = 350 \text{ m}}$. **(1 т.)**

(за $H \in [340, 360] \text{ m}$ – **(0.5 т.)**; за $H < 340 \text{ m}$ или $H > 360 \text{ m}$ – **(0 т.)**)