

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА, 08.05.2004 г
Решения на задачите от теоретичния кръг

Задача 1.

Част 1. а) Модулът на потенциалната енергия на апарата е

$$|E_n| = \gamma \frac{mM}{R} \dots\dots\dots 0,5 \text{ точки}$$

където m е масата на космическия апарат.

Кинетичната енергия определяме от закона на Нютон за гравитацията и от втория принцип на механиката, приложен за движението по окръжност:

$$F_n = ma_n \text{ или } \gamma \frac{mM}{R^2} = m \frac{v^2}{R} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \gamma \frac{mM}{2R} = \frac{|E_n|}{2}; \quad \frac{|E_n|}{E_k} = 2 \dots\dots\dots 0,5 \text{ точки}$$

$$\text{б) } F_n = ma_n = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R \text{ или } \gamma \frac{mM}{R^2} = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$$

откъдето изразяваме масата M на планетата

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{\gamma T^2} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$$

$$M = 6 \cdot 10^{18} \text{ kg} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$$

в) Голямата полуос на изродената орбита е $a = R/2 \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

Периодът T_1 на движение по такава орбита се определя от закона на Кеплер

$$\left(\frac{T_1}{T} \right)^2 = \left(\frac{R/2}{R} \right)^3, \quad T_1 = \frac{T\sqrt{2}}{4} \dots\dots\dots 1 \text{ точки}$$

Времето на падане е равно на полупериода $t = T_1/2 \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

$$t = \frac{T\sqrt{2}}{8} = 5,55 \cdot 10^4 \text{ s} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$$

Част 2. г) От симетрията следва, че телата ще се сблъскат в центъра на квадрата. $\dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

д) В началния момент на всяко тяло действа гравитационна сила с големина

$$F = \gamma \frac{mm}{R^2} \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{4} \right) \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$$

насочена към центъра на квадрата. Във всеки момент по време на движението четирите тела се намират във върховете на квадрат, чийто диагонал $2r$ непрекъснато намалява. Моментната стойност на силата, която действа на

дадено тяло е $F = \gamma \frac{mm}{r^2} \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{4} \right)$. Това е същата сила, която би действала на

тяло с маса m , което се намира на разстояние r от неподвижен силов център с

$$\text{маса } M = m \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{4} \right) \dots\dots\dots 2 \text{ точки}$$

т.е. в центъра на квадрата.

По този начин задачата се свежда до ситуацията, разгледана в подусловие в) – падане без начална скорост към неподвижен силов център.

Периодът T на движението по кръгова орбита с радиус R около силовия център се определя както в подусловие б)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}} \dots\dots\dots 0,5 \text{ точки}$$

От закона на Кеплер $\left(\frac{T_1}{T} \right)^2 = \left(\frac{R/2}{R} \right)^3$ определяме периода на движение по

изродената орбита

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{R^3}{2\gamma M}} \dots\dots\dots 0,5 \text{ точки}$$

Времето на падане е равно на полупериода

$$t = \frac{T_1}{2} = \pi \sqrt{\frac{R^3}{8\gamma M}} = \pi \sqrt{\frac{R^3}{2\gamma m(2\sqrt{2}+1)}} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$$

Допълнение
(за тези, които обичат да смятат)

Задачата за падане към гравитационен силов център

Записваме уравнението на движение (1) $m \frac{dv}{dt} = -\gamma \frac{mM}{r^2}$.

От закона за запазване на енергията $\frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r} = -\gamma \frac{mM}{R}$ изразяваме

скоростта $v = \sqrt{2\gamma M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}$, откъдето получаваме

$$(2) \quad dv = -\frac{\gamma M}{r^2 \sqrt{2\gamma M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}} dr.$$

Заместваме dv в уравнение (1) и след интегриране получаваме

$$t = \int_R^0 \frac{dr}{\sqrt{2\gamma M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}} = \pi \sqrt{\frac{R^3}{8\gamma M}}.$$

Задача 2. а) По определение топлинният капацитет c за дадения процес е

$$c = \frac{\Delta Q}{\Delta T}, \quad (1 \text{ т.})$$

където ΔQ е полученото от газа количество топлина, а ΔT – малко изменение на температурата му. От първия принцип на термодинамиката следва

$$c = c_V + p \frac{\Delta V}{\Delta T}, \quad (1 \text{ т.})$$

където ΔV е изменението на обема на газа при промяна на температурата с ΔT .

Като използваме уравнението на състояние

$$pV = RT, \quad (0,5 \text{ т.})$$

намираме

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.} \quad (0,5 \text{ т.})$$

За две състояния на газа с параметри T, V и $T + \Delta T, V + \Delta V$ имаме

$$TV^{n-1} = (T + \Delta T)(V + \Delta V)^{n-1}, \quad (0,5 \text{ т.})$$

откъдето при

$$\left| \frac{\Delta T}{T} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\Delta V}{V} \right| \ll 1$$

следва

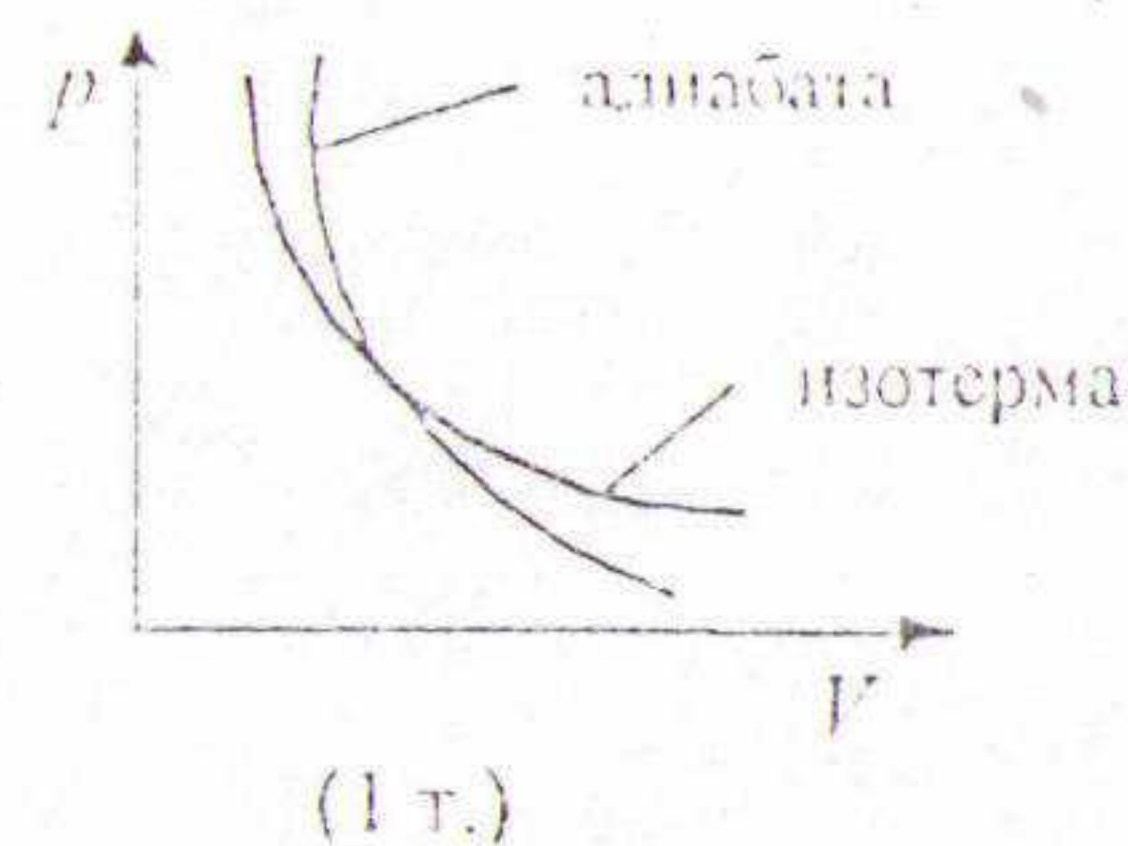
$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = -\frac{V}{(n-1)T} = -\frac{R}{(n-1)p}. \quad (2 \text{ т.})$$

Като отчетем, че $c_p = \frac{R}{\gamma - 1}$ (0,5 т.) намираме

$$c = \frac{n - \gamma}{(\gamma - 1)(n - 1)} R. \quad (1 \text{ т.})$$

б) При нагряване $\Delta Q > 0$ (1 т.). Когато $\Delta T < 0$, имаме $c < 0$ (1 т.).

Това е възможно при



$$1 < n < \gamma. \quad (2 \text{ т.})$$

в) При $n = 1$ имаме изотермен процес, тъй като $pV = \text{const}$ (1 т.). Аналогично при $n = \gamma$ процесът е адиабатен –

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (1 \text{ т.})$$

За $1 < n < \gamma$ налягането p се изменя по-бързо с изменение на обема V , отколкото при изотермен процес и по-бавно, отколкото при адиабатен процес (1 т.).

Задача 3.

а) От теоремата на Гаус следва, че:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\epsilon_0},$$

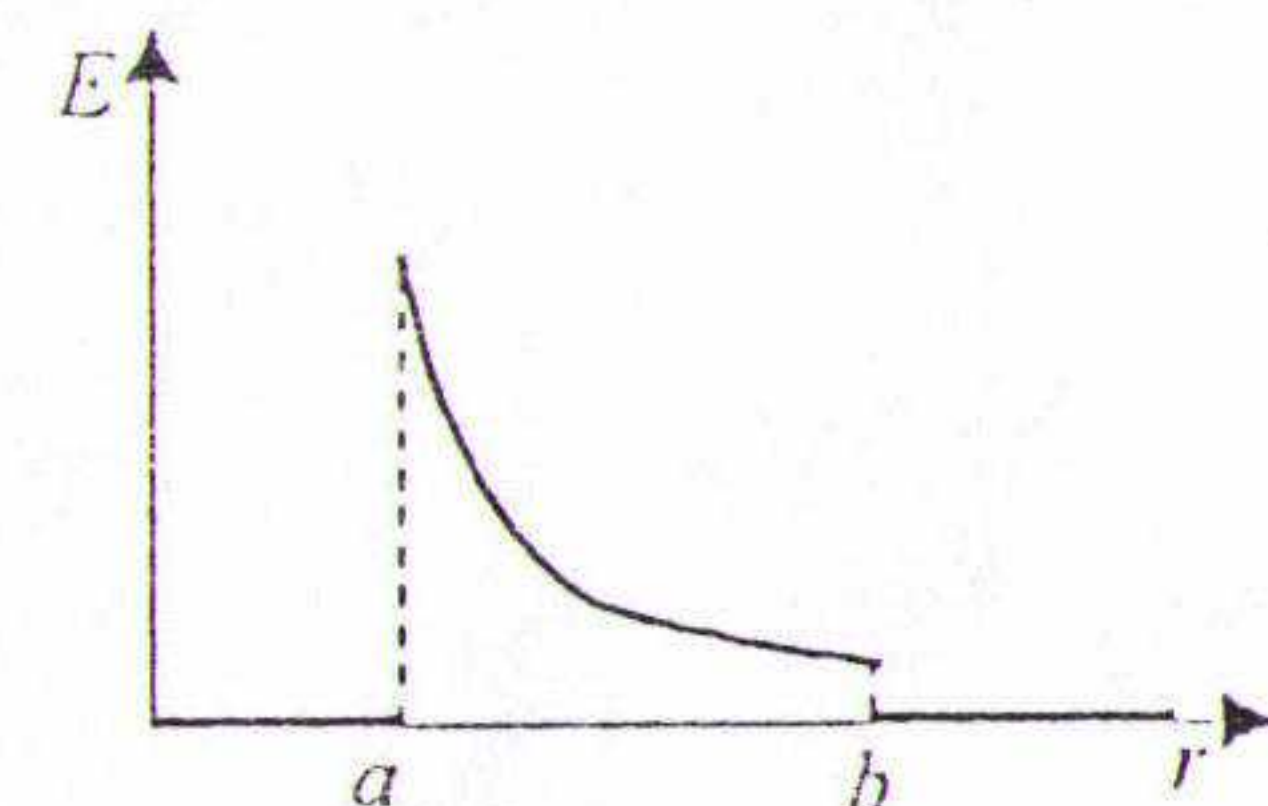
където $Q(r)$ е пълният заряд, заграден от сфера с радиус r . Възможни са три случая:

1. Точката A е във вътрешността на вътрешната сфера, т.е. $r < a$. Тогава $Q(r) = 0$.
2. Точката A се намира между двете сфери, т.е. $a < r < b$. Тогава тогава повърхността с радиус r загражда само вътрешната сфера, т.е. $Q(r) = q$.
3. Точката A е извън външната сфера, т.е. $r > b$. Тогава тогава повърхността с радиус r загражда и двете сфери, т.е. $Q(r) = +q - q = 0$.

Следователно:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < a \text{ или при } r > b; \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{при } a < r < b. \end{cases}$$

[5 т.]



б) Понеже $E(r) = 0$ при $r < a$, следва, че $\phi(r) = \text{const}$ при $r < a$. Тъй като сме приели центъра на сферите ($r = 0$) за точка с нулев потенциал, следва:

$$(1) \quad \phi(r) = 0 \text{ при } r < a.$$

При $a < r < b$ интензитетът на полето съвпада с този на точков заряд q , разположен в центъра:

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C,$$

където C е константа, която зависи от избора на нулево ниво за потенциала. Понеже $\phi(r)$ е непрекъсната функция, следва, че $\phi(a) = 0$. Оттук намираме за C :

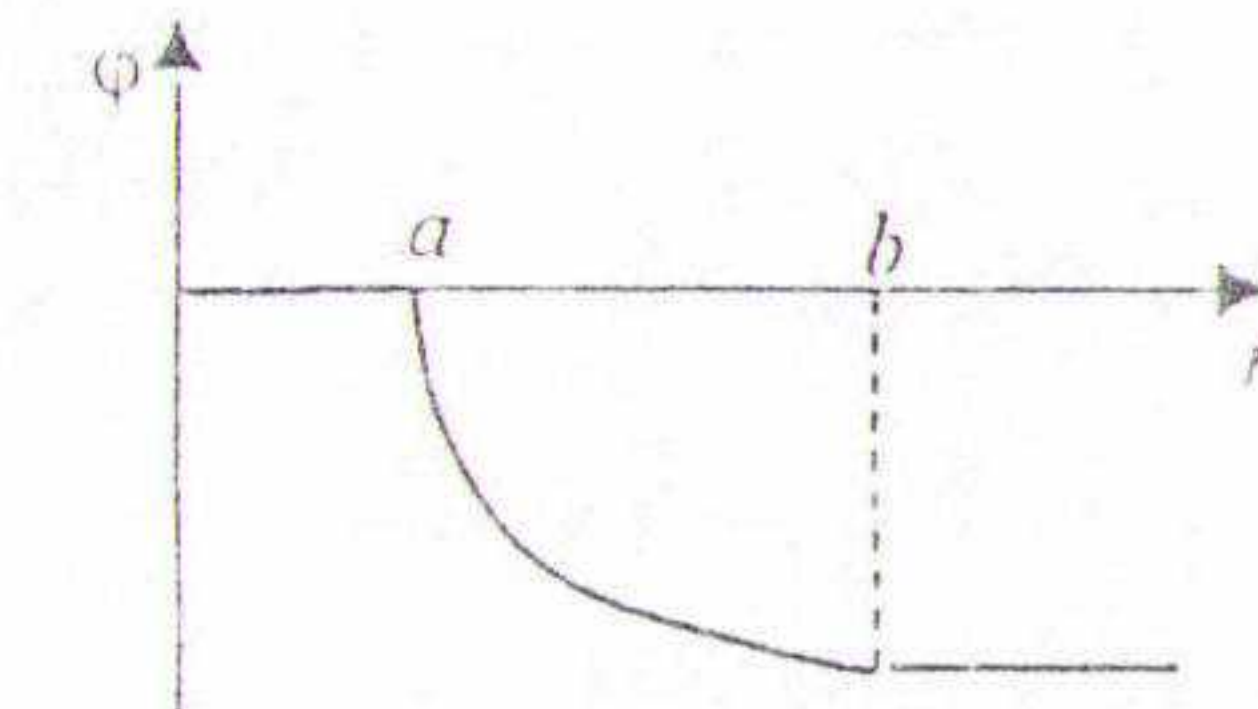
$$C = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

и окончателно:

$$(2) \quad \phi(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \text{ при } a \leq r \leq b.$$

Тъй като $E(r) = 0$ при $r > b$, следва, че $\phi(r) = B = \text{const}$ при $r > b$. Понеже $\phi(r)$ е непрекъсната функция, следва, че $B = \phi(b)$. Оттук намираме:

$$(3) \quad \phi(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \text{ при } r > b.$$



[5 т.]

в) В присъствие на диелектрик електричното поле между двете сфери, на разстояние r от центъра, е:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Плътноста на електричния ток на същото разстояние от центъра е:

$$J(r) = \frac{E(r)}{\rho} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 \rho r^2}$$

и е насочена радиално. Пълният ток, който преминава през сферична повърхност с радиус r , е следователно:

$$I = J(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 \rho}.$$

Тъй като за интервала Δt големината на заряда намалява с 5 %, можем да приемем с относителна грешка 5 %, че големината на тока остава постоянна. Тогава за преминалия заряд имаме:

$$\Delta q \approx I \Delta t$$

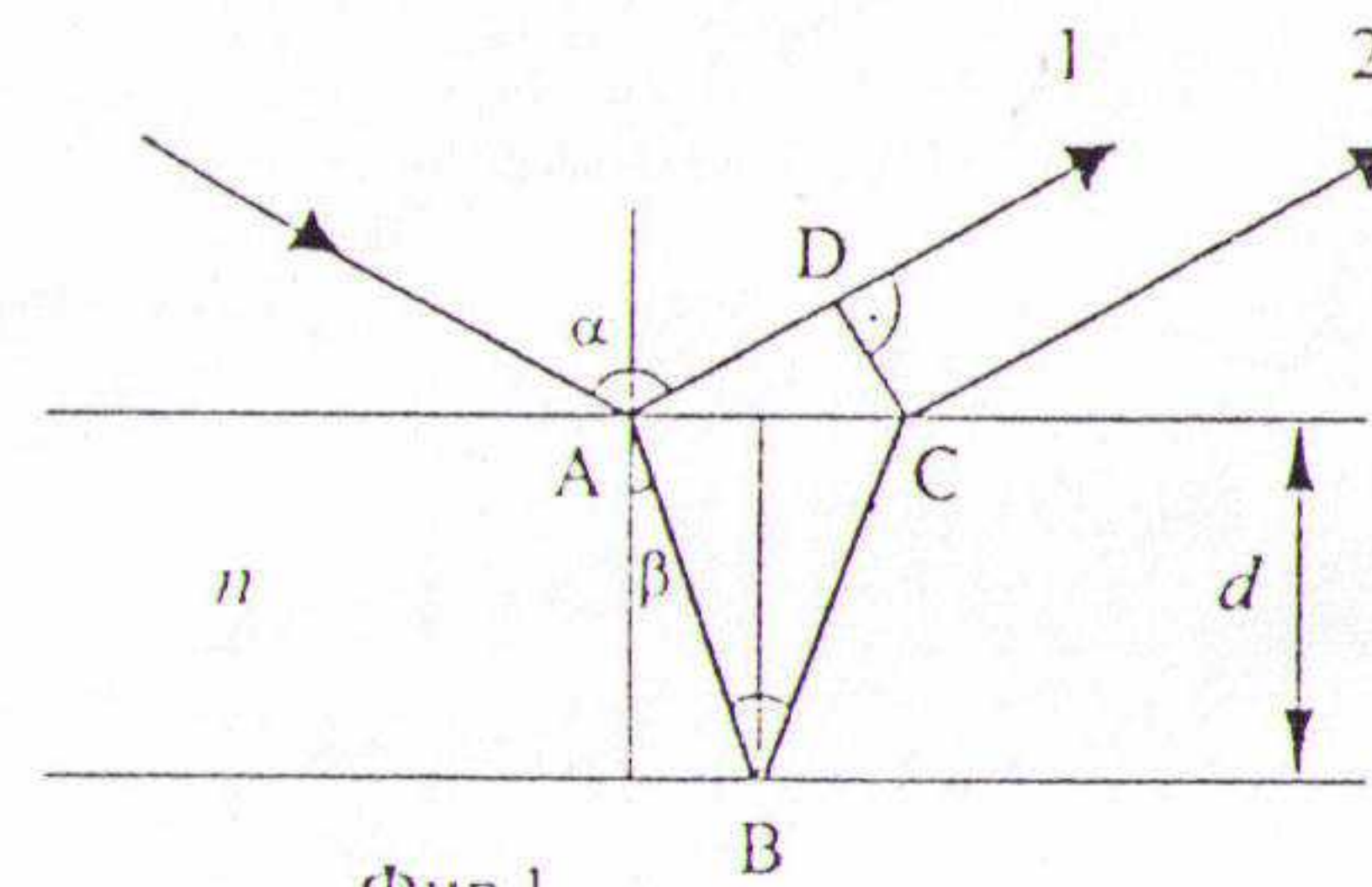
или

$$0,05q \approx \frac{q \Delta t}{\epsilon\epsilon_0 \rho}$$

От последното уравнение намираме:

$$\rho \approx \frac{\Delta t}{0,05\epsilon\epsilon_0} \approx 1,1 \cdot 10^{13} \Omega \cdot \text{m}. \quad [5 \text{ т.}]$$

Задача 4.



Фиг. 1

Както се вижда от Фиг. 1, разликата Δ в оптичните пътища на лъчите 1 и 2 е равна на:

$$\Delta = n \cdot (AB + BC) - AD + \lambda/2$$

Тъй като $AB = BC = d/\cos(\beta)$, а $AD = AC \cdot \sin(\alpha) = 2d \tan(\beta) \sin(\alpha)$, за Δ се получава:

$$\Delta = n2d/\cos(\beta) - 2d \tan(\beta) \sin(\alpha) + \lambda/2 =$$

$$= \frac{2d}{\cos(\beta)} [n - \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)] + \frac{\lambda}{2}$$

От закона на Снелиус следва, че $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n$. Така изразът за Δ се преобразува до:

$$\Delta = \frac{2d}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2(\alpha)}{n^2}}} [n - \frac{\sin(\alpha)}{n} \sin(\alpha)] + \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)} + \frac{\lambda}{2} \quad [4 \text{ т.}]$$

б) За да се наблюдава m -ти интерференчен максимум, трябва да е изпълнено следното равенство:

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)} + \frac{\lambda}{2} = m\lambda, \text{ където } m \text{ е цяло число.}$$

Тъй като $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$, то m принадлежи на интервала

$$m \in \left(\frac{2d}{\lambda} \sqrt{n^2 - 1} + \frac{1}{2}, \frac{2d}{\lambda} n + \frac{1}{2} \right]$$

При зададените стойности за d , λ и n се получава, че m принадлежи на интервала $m \in (2,97, 4,23]$.

В този интервал има 2 цели числа и те са 3 и 4, следователно ще се наблюдават 2 максимума и те са от трети и четвърти порядък.

Ъглите, при които те ще се видят, пресмятаме от равенството

$$\sin^2(\alpha_m) = n^2 - \left[\frac{(m - \frac{1}{2})\lambda}{2d} \right]^2$$

Замествайки, се получава $\alpha_3 = 78,7^\circ$ и $\alpha_4 = 12,4^\circ$

[5 т.]

в) Условието за наблюдаване на интерференчен максимум от m -ти порядък

$$\Delta_m = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha_m)} = m\lambda$$

може да се преобразува до:

$$\sin(\alpha_m) = \sqrt{n^2 - \left[\frac{(2m-1)\lambda}{4d} \right]^2}$$

За да се наблюдават само два максимума, и те да са от трети и четвърти порядък, трябва да са изпълнени следните неравенства:

$$\sin(\alpha_2) \geq 1, \sin(\alpha_3) < 1, \sin(\alpha_4) \geq 0 \text{ и } \sin(\alpha_5) < 0$$

Замествайки с дадената стойност за показателя на пречупване, от първото неравенство се получава:

$$\sin(\alpha_2) = \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{9}{16} \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2} \geq 1, \text{ откъдето следва, че}$$

$$\frac{\lambda}{d} \leq \frac{4\sqrt{7}}{9} \approx 1.176$$

От второто неравенство се получава:

$$\sin(\alpha_3) = \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{25}{16} \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2} < 1, \text{ откъдето следва, че}$$

$$\frac{\lambda}{d} > \frac{4\sqrt{7}}{15} \approx 0.706$$

От третото неравенство се получава:

$$\sin(\alpha_4) = \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{49}{16} \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2} \geq 0, \text{ откъдето следва, че}$$

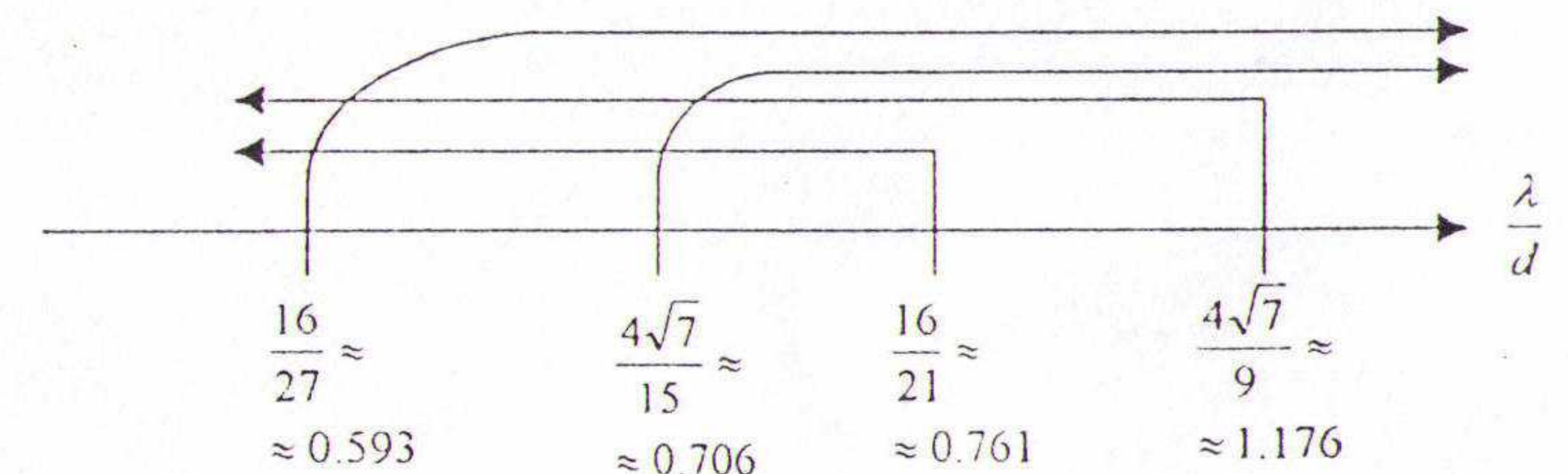
$$\frac{\lambda}{d} \leq \frac{16}{21} \approx 0.761$$

От четвъртото неравенство се получава:

$$\sin(\alpha_5) = \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{81}{16} \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2} < 0, \text{ откъдето следва, че}$$

$$\frac{\lambda}{d} > \frac{16}{27} \approx 0.593$$

Общо четирите неравенства налагат следните ограничения за отношението $\frac{\lambda}{d}$:



$$\text{Следователно } \frac{\lambda}{d} \in \left(\frac{4\sqrt{7}}{15}, \frac{16}{21} \right]$$

[6 т.]

162