

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национален кръг на Олимпиадата по физика, 3-4 май 2008 г.
Решения на задачите от теоретичната тема

Решение на задача 1. Въртяща се пружина с топче

а) Записваме уравнението на движение за топчето (по вертикална и хоризонтална компоненти):

$$T \cos \alpha - mg = 0, \quad (1.1) \quad [1 \text{ т.}]$$

$$T \sin \alpha = m\omega^2 r, \quad (1.2) \quad [1 \text{ т.}]$$

където r е радиусът на окръжността, по която се движи топчето.

От чертежа следва, че

$$r = (l_0 + x) \sin \alpha, \quad (1.3) \quad [0,5 \text{ т.}]$$

а еластичната сила е

$$T = kx. \quad (1.4) \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Като заместим r и T в (1.2) съответно от (1.3) и от (1.4), се получава

$$kx \sin \alpha - m\omega^2 (l_0 + x) \sin \alpha = 0. \quad (1.5) \quad [1 \text{ т.}]$$

След съкращаване на $\sin \alpha$, имаме

$$x = \frac{m\omega^2 l_0}{k - m\omega^2} = \frac{l_0}{\frac{k}{m\omega^2} - 1}. \quad (1.5) \quad [1 \text{ т.}]$$

б) Като заместим в (1.4) израза за x от (1.5), а така получената формула за T в (1.1), се получава

$$\frac{kl_0}{\frac{k}{m\omega^2} - 1} \cos \alpha = mg. \quad [1 \text{ т.}]$$

След опростяване на израза, имаме

$$\cos \alpha = \frac{g}{kl_0\omega^2} (k - m\omega^2) = \frac{mg}{kl_0} \left(\frac{k}{m\omega^2} - 1 \right). \quad (1.6) \quad [2 \text{ т.}]$$

в) За да има физически смисъл формула (1.5), тя трябва да дава за x положителна и крайна стойност. Следователно,

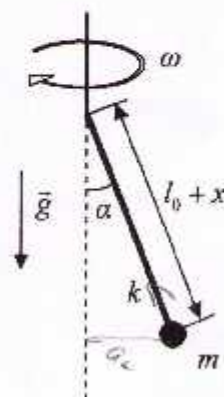
$$\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.7) \quad [0,5 \text{ т.}]$$

При извода на (1.5) сме съкратили на $\sin \alpha$, което означава, че тази формула е вярна за $\alpha > 0$. [0,5 т.]

От друга страна формулата (1.6) за $\cos \alpha$ трябва да дава стойности в интервала $(0,1)$. Тогава от условието $\cos \alpha > 0$ следва, че

$$\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.8) \quad [0,5 \text{ т.}]$$

а от условието $\cos \alpha < 1$, намираме че



$$\omega > \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{k} + \frac{l_0}{g}}} \quad (1.9) \quad [1 \text{ т.}]$$

Следователно формули (1.5) и (1.6) са верни за честоти $\omega \in (\omega_{\min}, \omega_{\max})$, където

$$\omega_{\min} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{k} + \frac{l_0}{g}}},$$

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

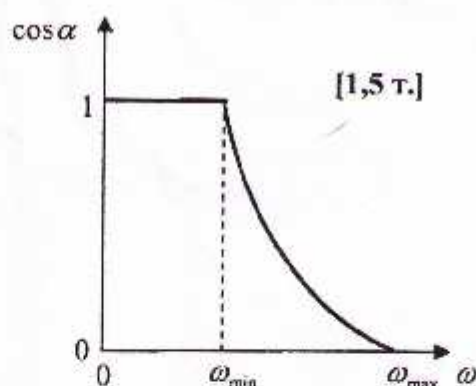
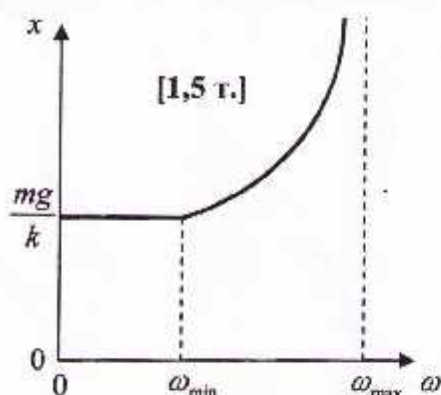
г) Проста проверка

$$\omega_{\min} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{k} + \frac{l_0}{g}}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{l_0 k}{gm}}} < \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_{\max} \quad [0,5 \text{ т.}]$$

показва, че за всяка комбинация от параметрите l_0, g, k и m , $\omega_{\min} < \omega_{\max}$ и следователно интервалът винаги съществува. [0,5 т.]

При $\omega \leq \omega_{\min}$, $\alpha = 0$, имаме $x = \frac{mg}{k}$.

д) Графиките на $x = f(\omega)$ и $\cos \alpha = g(\omega)$ при $\omega \in (0, \infty)$ изглеждат така:



Обосновка:

$$\frac{dx}{d\omega} > 0, \frac{d^2x}{d\omega^2} > 0,$$

$$\frac{d(\cos \alpha)}{d\omega} < 0, \frac{d^2(\cos \alpha)}{d\omega^2} > 0,$$

$$\omega \in (\omega_{\min}, \omega_{\max}).$$

Решение на задача 2. Параболично огледало

а) Дадената точка има само центростремително ускорение с големина:

$$a_n = \frac{v^2}{|x|} = \omega^2 |x|. \quad [1 \text{ т}]$$

Понеже ускорението е насочено хоризонтално, към оста на въртене, неговите компоненти са:

$$a_x = -\omega^2 x$$

$$a_y = 0$$

$$[1 \text{ т} = 0,5 \text{ т} + 0,5 \text{ т}]$$

б) Разглеждаме малък обем течност с маса Δm около т. А. Върху обема действат сила на тежестта:

$$G = \Delta m g, \quad [0,5 \text{ т}]$$

насочена вертикално надолу и сила N , която се дължи на налягането на околната течност, насочена перпендикулярно на свободната повърхност. [0,5 т]

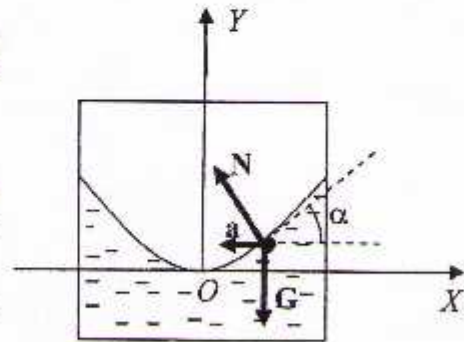
От II принцип на Нютон $\Delta m \vec{a} = \vec{N} + \vec{G}$, след проектиране по осите X и Y , намираме:

$$\Delta m a_x = -\Delta m \omega^2 x = -N \sin \alpha \quad [2 \text{ т} = 1 \text{ т} + 1 \text{ т}]$$

$$\Delta m a_y = 0 = N \cos \alpha - \Delta m g$$

От двете уравнения намираме:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 x}{g}. \quad [1 \text{ т}]$$



в) От връзката:

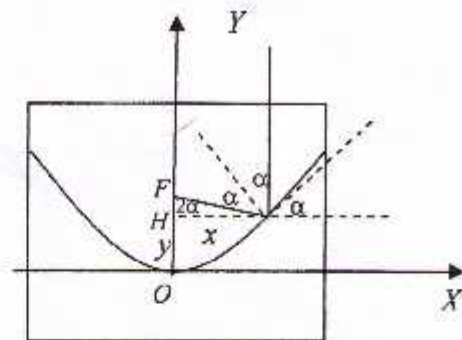
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} \quad [1 \text{ т}]$$

и уравнението на повърхността $y = Ax^2$ следва:

$$y' = \frac{\omega^2 x}{g} = 2Ax, \quad [1 \text{ т}]$$

откъдето намираме:

$$A = \frac{\omega^2}{2g}. \quad [1 \text{ т}]$$



г) Разглеждаме лъч светлина, който пада в точка от повърхността с координата x . Неговият ъгъл на падане е α . От законите за отражение следва, че отразеният лъч сключва ъгъл 2α с вертикалата (оста Y). [1 т]

От чертежа се вижда, че височината, на която отразеният лъч пресича оста Y е:

$$f = |OF| = |OH| + |HF| = y + \frac{x}{\operatorname{tg}(2\alpha)} = y + x \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad [2 \text{ т}]$$

Като вземем предвид, че $y = Ax^2$ и $\operatorname{tg} \alpha = 2Ax$, намираме:

$$f = \frac{1}{4A} = \frac{g}{2\omega^2} \quad [1 \text{ т}]$$

При честота на въртене $n = 60 \text{ об/мин} = 1 \text{ об/с}$, ъгловата скорост на течността е:

$$\omega = 2\pi n \approx 6,28 \text{ rad/s}. \quad [1 \text{ т}]$$

Окончателно намираме $f \approx 0,12 \text{ m}$. [1 т]

Решение на задача 3

а) $W_0 = \frac{CU_0^2}{2} = 9 \text{ MJ.} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

б) По правилото на дясната ръка определяме, че магнитната индукция е насочена вертикално надолу $\dots\dots\dots 0,5 \text{ точки}$

в) В началния момент през пръчката протича ток $I = U_0/R \dots\dots\dots 0,5 \text{ точки}$

На пръчката действа магнитна сила $F = B\ell I$
 $\dots\dots\dots 0,5 \text{ точки}$

Началното ускорение на пръчката е

$a = \frac{B\ell U_0}{mR} \dots\dots\dots 0,5 \text{ точки}$

г) Съгласно с правилото на Ленц индуцираното електродвижещо напрежение (ЕДН) е в движещата се пръчка намалява тока през пръчката (индуцираното ЕДН е се противопоставя на причината, която го поражда). Следователно индуцираното ЕДН е има обратна полярност на напрежението на кондензатора. В процеса на разреждане на кондензатора неговото напрежение намалява, а индуцираното ЕДН нараства, докато общото напрежение стане нула, т.е. докато двете напрежения се изравнят по големина. В този момент общият ток става нула и пръчката достига максималната си скорост. $\dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

(1) $\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B\ell v_{\max} = \frac{q_{\min}}{C} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

Уравнението на движението на пръчката е

(2) $ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = B\ell I = B\ell \frac{\Delta q}{\Delta t} \dots\dots\dots 0,5 \text{ точки}$

От уравнение (2) се вижда, че изменението на скоростта е правопрпорционално на изменението на заряда на кондензатора. Скоростта нараства от нула до $v_{\max}$, а зарядът намалява от $q_0 = CU_0$ до $q_{\min}$. Следователно от уравнение (2) следва равенството

(3) $m(v_{\max} - 0) = B\ell(q_0 - q_{\min}) \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

От уравнения (1) и (3) получаваме:

$v_{\max} = \frac{B\ell CU_0}{m + CB^2\ell^2} \dots\dots\dots 0,5 \text{ точки}$

$q_{\min} = \frac{B^2\ell^2 C^2 U_0}{m + CB^2\ell^2} \dots\dots\dots 0,5 \text{ точки}$

д) При $m = 1 \text{ kg}$ $v_{\max} \approx 360 \text{ m/s.} \dots\dots\dots 0,5 \text{ точки}$

е) $\eta = \frac{mB^2\ell^2 C}{(m + B^2\ell^2 C)^2} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

ж) Използваме неравенството между средното аритметично и средното геометрично:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

В случая $a = m$, $b = B^2\ell^2 C$.

$$\eta = \left(\frac{\sqrt{ab}}{a+b} \right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

Равенството е при $a = b$, т.е. при $m = B^2\ell^2 C$.

Следователно максималната ефективност на оръдието е $\eta_{\max} = 1/4$. Тя се достига при маса на пръчката

$m = B^2\ell^2 C = 7,2 \text{ g.} \dots\dots\dots 3 \text{ точки}$

з) $v_{\max} = \frac{B\ell CU_0}{2m} = 25 \text{ km/s.} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

Забележка. Подобни скорости действително са постигнати с релсово електромагнитно оръдие (railgun) при изстрелване на малки снаряди (вж. <http://en.wikipedia.org/wiki/Railgun>).

и) Когато е изпълнено условието за максимална ефективност $m = B^2\ell^2 C$, минималният заряд на кондензатора е

$$q_{\min} = U_0 C/2.$$

Следователно в кондензатора остава 1/4 от началната енергия, 1/4 от енергията се преобразува в кинетична енергия на пръчката, а останалата половина се отделя като джаулова топлина:

$Q = W_0/2 \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

к) Според условието на задачата цялото количество топлина (4,5 MJ) трябва да се отдели в пръчката (7,2 g). Това би довело до нейното почти мигновено изпаряване $\dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

Решение на задача 4. а) За идеален газ показателят на адиабатата се дава с изрази

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}. \quad [1 \text{ т}]$$

Като отчетем съотношението на Майер

$$C_p = C_v + R, \quad [1 \text{ т}]$$

намираме

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{10}{3} R. \quad [1 \text{ т}]$$

б) Независимите движения дават адитивен принос в C_v , т.е.

$$C_v = C_v^{\text{tr}} + C_v^{\text{rot}} + C_v^{\text{vib}}. \quad [1 \text{ т}]$$

Като отчетем, че

$$C_v^{\text{tr}} = \frac{3}{2} R, \quad [1 \text{ т}]$$

$$C_v^{\text{rot}} = R, \quad [1 \text{ т}]$$

намираме

$$C_v^{\text{vib}} = \frac{5}{6} R. \quad [1 \text{ т}]$$

в) Вътрешната енергия на 1 mol газ, свързана с трептенията, е

$$U_{\text{vib}} = N_A \epsilon, \quad [1 \text{ т}]$$

където N_A е числото на Авогадро. По определение

$$C_v^{\text{vib}} = \frac{dU_{\text{vib}}}{dT} = 2R \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2}, \quad [1 \text{ т}]$$

където е отчетено, че $R = N_A k$.

[1 т]

г) Нека положим $x = \frac{h\nu}{kT}$.

[1 т]

Тогава имаме

$$\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{5}{12}, \quad e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 1,55x. \quad [1 \text{ т}]$$

Като отчетем, че

$$x = \frac{hc}{\lambda kT} = 3,38, \quad [1 \text{ т}]$$

намираме

$$\lambda = 14,7 \mu\text{m}. \quad [1 \text{ т}]$$

Тази стойност показва, че молекулата излъчва в инфрачервената област. [1 т]