



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Олимпиада по физика, Национален кръг, Плевен, 9 май 2009 г.
Решения на задачите от теоретичния кръг

Задача 1.

а) При първия вид трептене върху двата края на пръчката действат еднакви по големина и по посоки сили:

$$F_1 = F_2 = kx$$

Пръчката извършва постъпателно движение под действие на равнодействаща сила:

$$F = F_1 + F_2 = 2kx. \quad [1.0 \text{ т}]$$

Ефективният коефициент на еластичност е $k_{\text{eff}} = 2k$, откъдето честотата на първото трептене е:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} \approx 10 \text{ Hz} \quad [1.0 \text{ т}]$$

При втория вид трептене на двата края действат еднакви по големина сили $F_1 = F_2 = kx$ в противоположни посоки. Те създават общ въртящ момент:

$$M = F_1 \frac{L}{2} + F_2 \frac{L}{2} = kxL \quad [1.0 \text{ т}]$$

От уравнението за въртене около неподвижна ос:

$$\frac{1}{12} mL^2 \varepsilon = kxL, \quad [1.0 \text{ т}]$$

където ε е ъгловото ускорение на пръчката. От друга страна:

$$a = \varepsilon \frac{L}{2}, \quad [0.5 \text{ т}]$$

където a е ускорението, с което се движат двата края на пръчката. Следователно:

$$ma = 6kx \quad [0.5 \text{ т}]$$

Това е уравнение на хармонично трептене с честота:

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6k}{m}} \approx 17 \text{ Hz}. \quad [1.0 \text{ т}]$$

б) Площта на правоъгълника $ABCD$ се изменя с времето по закона:

$$S(t) = Ix(t) = LA \sin(2\pi\nu_1 t), \quad [0.5 \text{ т}]$$

а потокът на магнитното поле:

$$\Phi(t) = BS(t) = BLA \sin(2\pi\nu_1 t). \quad [0.5 \text{ т}]$$

От закона на Фарадей определяме

$$u(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -2\pi\nu_1 BLA \cos(2\pi\nu_1 t) \quad [1.0 \text{ т}]$$

Амплитудата на напрежението е:

$$U_{\text{max}} = 2\pi\nu_1 BLA = 6.3 \times 10^{-2} \text{ V} \quad [1.0 \text{ т}]$$

в) Ако приемем, че амплитудата на трептене почти не се променя за един период, върху резистора ще бъде приложено променливо напрежение с амплитуда U_{max} и ефективна стойност:



$$U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \pi v_1 B L A. \quad [0.5 \text{ т}]$$

Средната мощност на променливия ток в резистора е:

$$\bar{P} = \frac{U^2}{R} = 2 \frac{(\pi v_1 B L A)^2}{R}. \quad [0.5 \text{ т}]$$

За един период отделената топлина е:

$$Q = \bar{P} T = \frac{\bar{P}}{v_1} = 2 v_1 \frac{(\pi B L A)^2}{R} = 1.97 \times 10^{-7} \text{ J} \quad [1.0 \text{ т}]$$

г) Пълната енергия на системата преди включването на резистора е:

$$E_0 = \frac{1}{2} (2k) A^2 = k A^2. \quad [0.5 \text{ т}]$$

Относителното изменение на енергията за един период е:

$$\eta = \frac{\Delta E}{E} = -\frac{Q}{E} = -\frac{2 v_1 (\pi B L)^2}{R k} = -9.87 \times 10^{-5}. \quad [0.5 \text{ т}]$$

Енергията в края на N -тия период е свързана с енергията в края на предходния период чрез съотношението:

$$E_N = (1 + \eta) E_{N-1} = (1 - |\eta|) E_{N-1}. \quad [0.5 \text{ т}]$$

Следователно след включване на резистора енергията намалява като функция на броя периоди N по закона:

$$E_N = E_0 (1 - |\eta|)^N. \quad [0.5 \text{ т}]$$

От $A_N = (1/2) A_0$ следва $E_N = (1/4) E_0$. Следователно $(1 - |\eta|)^N = 1/4$ и

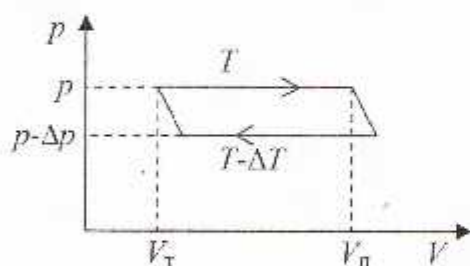
$$N = \frac{\ln(1/4)}{\ln(1 - |\eta|)} \approx \frac{\ln 4}{|\eta|}. \quad [1.0 \text{ т}]$$

Времето за N периода е:

$$t = NT = \frac{\ln 4}{|\eta| v_1} \approx 1400 \text{ s} \quad [1.0 \text{ т}]$$

Задача 2. Равновесие течност – пари

а) Цикълът на Карно е показан на фиг. 1 [2 т.]. Налягането е постоянно при изотермните процеси (подвижно бутало). Адиабатите са приблизително отсечки, като $\Delta p \ll p$.



Фиг. 1

б) За цикъла е в сила съотношението

$$A' = \eta Q_{\text{пол}}, \quad [1 \text{ т.}]$$

Като отчетем, че

$$\eta = \frac{\Delta T}{T}, \quad Q_{\text{пол}} = \mu \lambda, \quad [2 \text{ т.}]$$

$$A' = \Delta p (V_n - V_T) = \mu \Delta p (v_n - v_T), \quad [1 \text{ т.}]$$

намираме

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{\lambda}{T(v_n - v_T)}. \quad [1 \text{ т.}]$$



в) Водата кипи при температура $T_0 = 373 \text{ K}$ и налягане на парите $p_0 = 1 \text{ atm}$. [1 т.] Тогава имаме

$$\Delta p = \frac{\lambda \Delta T}{T(v_n - v_r)} \approx \frac{\lambda \Delta T}{T v_n}, \quad [1 \text{ т.}]$$

тъй като $v_n \gg v_r$,

Като отчетем, че

$$v_n = \frac{RT}{\mu p} \quad [0,5 \text{ т.}], \quad \frac{\Delta p}{p} \approx \frac{p - p_0}{p_0} \quad [0,25 \text{ т.}], \quad \frac{\Delta T}{T} \approx \frac{T - T_0}{T_0} \quad [0,25 \text{ т.}]$$

намираме

$$p \approx \left(1 + \frac{\mu \lambda \Delta T}{RT_0^2}\right) p_0 \approx 1,1 \text{ atm}. \quad [2 \text{ т.}]$$

г) Като разсъждаваме по същия начин

$$\Delta T = \frac{\Delta p (v_n - v_r) T}{\lambda} \approx \frac{\Delta p v_n T}{\lambda} = \frac{\Delta p}{p} \frac{RT^2}{\mu \lambda}. \quad [1 \text{ т.}]$$

Тъй като налягането на парите в тенджерата е $p = p_0 + \frac{4mg}{\pi d^2}$ [0,5 т.]

намираме

$$T \approx \left(1 + \frac{RT_0(p - p_0)}{p \mu \lambda}\right) T_0 \approx 380 \text{ K}, \quad t \approx 107^\circ \text{C} \quad [1,5 \text{ т.}]$$

Задача 3. Хроматична аберация и обектив-ахромат.

а) От дадената фигура, закона на Снелиус за пречупването и отношения в триъгълници в изискваното "параксиално приближение за тънка леща" могат да се намерят следните връзки:

$$\alpha = \varepsilon = x/R_1 \quad [0,1 \text{ т.}], \quad \alpha/\beta = n/n_0$$

$$[0,1 \text{ т.}], \quad \gamma = \varepsilon + (\alpha - \beta) \quad [0,2 \text{ т.}],$$

$$\varepsilon = x/R_2 \quad [0,2 \text{ т.}], \quad \gamma/\delta = n_0/n \quad [0,1$$

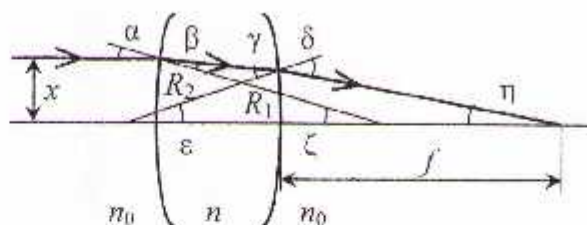
$$\text{т.}], \quad \eta = \delta - \varepsilon \quad [0,2 \text{ т.}], \quad \eta = x/f \quad [0,1$$

$$\text{т.}], \quad \text{За верен чертеж} \quad [1 \text{ т.}]$$

Използвайки последователно намерените връзки, получаваме:

$$f = \frac{x}{\eta} = \frac{x}{\delta - \varepsilon} = \frac{x}{\frac{n}{n_0} \gamma - \varepsilon} = \frac{x}{\frac{n}{n_0} [\varepsilon + (\alpha - \beta)] - \varepsilon} = \frac{x}{\frac{n}{n_0} (\alpha - \beta) + \frac{n - n_0}{n_0} \varepsilon} =$$

$$\frac{\frac{n_0 x}{n - n_0} \alpha + \frac{n - n_0}{n_0} \varepsilon}{\frac{n - n_0}{n_0} \alpha + \frac{n - n_0}{n_0} \varepsilon} =$$



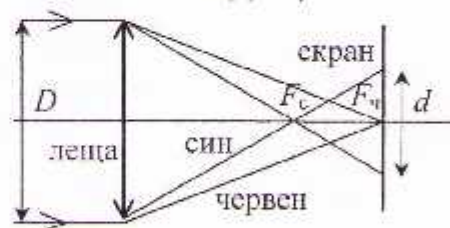


$$\frac{n_0 x}{(n - n_0) \left(\frac{x}{R_1} + \frac{x}{R_2} \right)} = \frac{n_0}{(n - n_0) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \quad [2 \text{ т.}] \quad (3.1)$$

б) Използвайки (3.1) в частния случай $n_0 = 1$ и $R_1 = R_2 = R$ за фокусното разстояние на лещата за синия и червения сноп получаваме съответно: $f_c = \frac{R}{2(n_c - 1)}$ [0,2 т.] и

$$f_n = \frac{R}{2(n_n - 1)} \quad [0,2 \text{ т.}]. \text{ От чертежа следва:}$$

$$\frac{d}{D} = \frac{f_n - f_c}{f_c} \quad [1 \text{ т.}] = \frac{f_n}{f_c} - 1 = \frac{n_c - 1}{n_n - 1} - 1 = \frac{n_c - n_n}{n_n - 1}$$



$$\text{Следователно } d = \frac{n_c - n_n}{n_n - 1} D \quad (3.2) \quad [1,6 \text{ т.}].$$

в) От дадената фигура, закона на Снелиус за пречупването и отношения в триъгълници в изискваното "параксиално приближение за тънка леща" могат да се намерят следните връзки:

$$\alpha = \zeta = x/R \quad [0,1 \text{ т.}], \quad \alpha/\beta = n_1 \quad [0,1$$

$$\text{т.}], \quad \gamma = \varepsilon + (\alpha - \beta) \quad [0,2 \text{ т.}], \quad \varepsilon = x/R$$

$$[0,2 \text{ т.}], \quad \gamma/\delta = n_2/n_1 \quad [0,1 \text{ т.}],$$

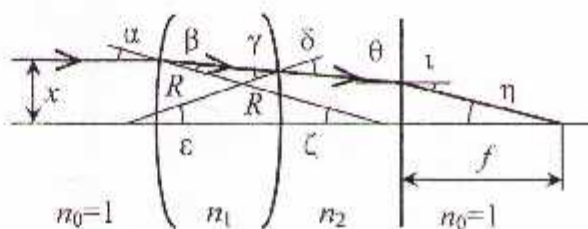
$$\vartheta = \delta - \varepsilon \quad [0,2 \text{ т.}],$$

$$\vartheta/\iota = 1/n_2 \quad [0,1 \text{ т.}], \quad \iota = \eta \quad [0,1 \text{ т.}],$$

$$\eta = x/f \quad [0,1 \text{ т.}]. \text{ За верен чертеж [1$$

т.].

Използвайки последователно намерените връзки, получаваме:



$$f = \frac{x}{\eta} = \frac{x}{\iota} = \frac{x}{n_2 \vartheta} = \frac{x}{n_2 (\delta - \varepsilon)} = \frac{x}{n_2 \left(\frac{n_1}{n_2} \gamma - \varepsilon \right)} = \frac{x}{n_1 \gamma - n_2 \varepsilon} = \frac{x}{n_1 [\varepsilon + (\alpha - \beta)] - n_2 \varepsilon} =$$

$$\frac{x}{n_1 \left(\alpha - \frac{\alpha}{n} \right) + (n_1 - n_2) \varepsilon} = \frac{x}{(n_1 - 1) \alpha + (n_1 - n_2) \varepsilon} = \frac{x}{(n_1 - 1) \frac{x}{R} + (n_1 - n_2) \frac{x}{R}} = \frac{R}{2n_1 - n_2 - 1}$$

$$[2 \text{ т.}] \quad (3.3). \text{ Тъй като се иска } f_c = f_n, \text{ то търсеното условие е } \frac{R}{2n_{1c} - n_{2c} - 1} =$$

$$\frac{R}{2n_{1n} - n_{2n} - 1} \quad (3.4) \text{ или } 2n_{1c} - n_{2c} = 2n_{1n} - n_{2n}, \text{ или } 2(n_{1c} - n_{1n}) = n_{2c} - n_{2n} \quad [0,8 \text{ т.}].$$

(3.5).

г) За да намерим подходящите два материала, допълваме дадената таблица със следните колонки [3 т.] [$n_c = n(\lambda = 450 \text{ nm})$ $n_n = n(\lambda = 650 \text{ nm})$] като използваме дадената формула на Коши $n(\lambda) = A + B/\lambda^2$]:



Материал	A	$B(\mu\text{m}^2)$	n_c	n_d	$2(n_c - n_d)$	$n_c - n_d$
Топен кварц	1.4580	0.00354	1.4755	1.4664	0.01821	0.00910
Боросиликатно стъкло BK7	1.5046	0.00420	1.5253	1.5145	0.02160	0.01080
Стъкло "Твърд кроп" K5	1.5220	0.00459	1.5447	1.5329	0.02361	0.01180
Стъкло "Бариев кроп" BaK4	1.5690	0.00531	1.5952	1.5816	0.02731	0.01365
Стъкло "Бариев флинт" BaF10	1.6700	0.00743	1.7067	1.6876	0.03821	0.01911
Стъкло "Тежък флинт" SF10	1.7280	0.01342	1.7943	1.7598	0.06902	0.03451

При сравняване на стойностите в последните две колонки, установяваме, че равенство (3.5) е приблизително изпълнено в случая, когато симетричната двойноизпъкнала леща се направи от топен кварц, а плосковдлъбнатата леща – от стъкло "Бариев флинт" BaF10 [1 т.].

Задача 4. Разпадане на π^0 мезон

а) $E_0 = mc^2 = 2,16 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 135 \text{ MeV}$, [1 т]

б) $E = E_0 + E_k = 2E_0 = 270 \text{ MeV}$, [1 т]

в) Релативисткият импулс на частицата е $p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - E_0^2} = \frac{E_0}{c} \sqrt{3}$, [1 т]

Дължината на вълната на Дьо Бройл е $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E_0 \sqrt{3}} = 5,3 \cdot 10^{-13} \text{ m}$, [1 т]

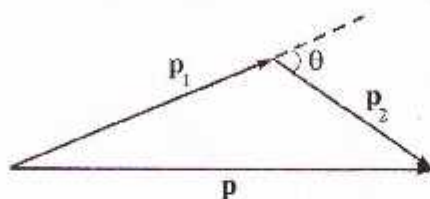
г) Записваме законите за запазване на енергията и импулса:

(1) $2E_0 = E_1 + E_2$;

(2) $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, [1 т]

Импулсите на γ -квантите са $p_1 = \frac{E_1}{c}$ и $p_2 = \frac{E_2}{c}$, [1 т]

От векторния триъгълник на импулсите (фиг. 1)



Фиг. 1.

с помощта на косинусовата теорема получаваме:

(3) $\frac{3E_0^2}{c^2} = \frac{E_1^2}{c^2} + \frac{E_2^2}{c^2} + \frac{2E_1E_2}{c^2} \cos \theta$, [1 т]

Вдигаме двете страни на равенство (1) на квадрат:



$$(4) \quad 4E_0^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2,$$

и изваждаме (3) от (4). Получаваме:

$$(5) \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{E_0}{\sqrt{4E_1E_2}}. \quad [2 \text{ т}]$$

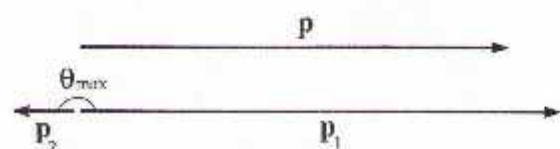
Използваме неравенството между средното аритметично и средното геометрично

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Както е известно, равенството е при $a = b$.

Следователно в нашия случай знаменателят във формула (5) има максимална стойност при $E_1 = E_2 = E_0$. [1 т]

Тогава ъгълът θ е минимален: $\theta_{\min} = 60^\circ$. [1 т]

д) Ъгълът на разлитане θ на двата γ -кванта е максимален, когато единият квант се движи в същата посока, в която се е движел π^0 мезонът, а другият – в противоположната посока (фиг. 2):



Фиг. 2.

$$\theta_{\max} = 180^\circ. \quad [1 \text{ т}]$$

В този случай равенство (5) добива вида:

$$(6) \quad \frac{E_0}{\sqrt{4E_1(2E_0 - E_1)}} = 1. \quad [1 \text{ т}]$$

Това е квадратно уравнение за E_1 , което има два корена:

$$(7) \quad E_1 = \frac{E_0}{2} (2 \pm \sqrt{3}). \quad [1 \text{ т}]$$

По-големият корен $E_{11} = 252 \text{ MeV}$ дава енергията на кванта, който се разпространява в същата посока, в която се е движел пионът преди разпадането. Вторият корен $E_{12} = 18 \text{ MeV}$ съответства на енергията на кванта, който се разпространява в противоположната посока. [1 т]