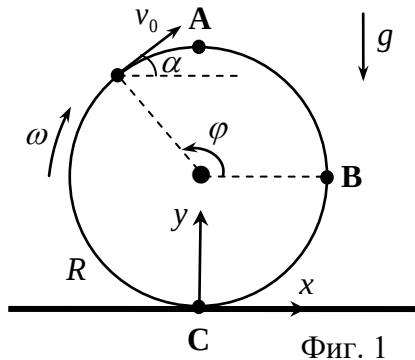


МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО ФИЗИКА

Ловеч, 5 април 2016 г.

Примерни решения и критерии за оценяване – тема за 10.–12. клас

Задача 1. Буксуваща гума.



а) Нека въведем Декартова координатна система, както е показано на фиг. 1. При отделянето на капка от повърхността на гумата тя има скорост с големина $v_0 = \omega R$, [0,5 т.] която съвпада с линейната скорост на съответната точка от повърхността на гумата, откъдето се отделя капката. Следователно скоростта е тангенциална към околната повърхнина и насочена по посока на въртенето на гумата. Капките, излитаци от т. А, са с уравнения на движение $x = v_0 t$ и $y = 2R - gt^2/2$.

[0,5 т.] Капките падат на земята, когато $y = 2R - gt^2/2 = 0$. Това става при $t = 2\sqrt{R/g}$ и $l = v_0 t = 2\omega R\sqrt{R/g}$. [1 т.]

б) Нека да параметризираме точките от околната повърхнина на гумата с ъгъла φ , показан на фиг. 1. Скоростта v_0 сключва с хоризонта ъгъл $\alpha = \varphi - 90^\circ$. [1 т.] Уравненията за движение на произволна капка са: $x = R\cos\varphi + v_0 t \sin\varphi$ [1 т.] и $y = R(1 + \sin\varphi) - v_0 t \cos\varphi - gt^2/2$. [1 т.] Следователно за да може капките да минат през т. В, трябва $x = R\cos\varphi + v_0 t \sin\varphi = R$ и $y = R(1 + \sin\varphi) - v_0 t \cos\varphi - gt^2/2 = R$. [0,5 т.] Заместваме t от първото уравнение във второто и получаваме, че търсената точка е със $\sin\varphi = \frac{4\omega^2 Rg}{4\omega^4 R^2 + g^2}$. [1 т.] В същото време се получава, че $\cos\varphi < 0$, т.е. точката лежи наляво от т. А на фиг. 1. [0,5 т.]

в) В най-високата точка от своята траектория капките имат нулева вертикална компонента на скоростта, т.е. $v_y = -v_0 \cos\varphi - gt = 0$. [1 т.] Като заместим t от това уравнение в уравнението за движение по y , получаваме $y_{\max} = R(1 + \sin\varphi) + \frac{v_0^2 \cos^2\varphi}{2g}$ за произволна капка. [2 т.] Около максималната височина $h_{\max} = y_{\max}(\varphi_{\max h})$ винаги има две различни стойности на φ , за които $y_{\max}$ ще бъде едно и също. [1 т.] Тези стойности се получават като решение на квадратното уравнение $\frac{v_0^2}{2g} \sin^2\varphi - R\sin\varphi - R - \frac{v_0^2}{2g} + y_{\max} = 0$. [2 т.]

Единствено в максимума ще има една единствена стойност на φ за фиксирано $y_{\max}$, т.е. уравнението ще има един двоен корен, което се реализира при нулиране на дискриминантата на квадратното уравнение, откъдето следва, че
$$h_{\max} = R + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{gR^2}{2v_0^2} = R + \frac{g}{2\omega^2} + \frac{\omega^2 R^2}{2g}. \quad [2 \text{ т.}]$$

Задача 2. Топлина и работа

Част А. а) Всяка от графиките се състои от три участъка. Първият участък представя процес на нагряване на течността до температурата на кипене. [0,5 т.] Вторият, хоризонтален участък, е свързан с кипенето на течността, като нагряването води до изпарението ѝ. [0,5 т.] На третия участък цялото количество течност се е изпарило и се наблюдава нагряване на парите. [0,5 т.]

б) Хоризонталният участък на графиките се реализира при температурата на кипене на течността – t_1 за течността 1 и t_2 за течността 2. Както се вижда от фиг. 1 имаме, $t_1 < t_2$. [0,5 т.] При нагряване до температурата на кипене, течностите получават количество топлина

$$Q_1 = P\tau_2, \quad Q_2 = P\tau_1 \quad [0,5 \text{ т.}]$$

съответно. Следователно имаме

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\tau_2}{\tau_1} > 1. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

От друга страна са в сила равенствата

$$Q_1 = mc_1 t_1, \quad Q_2 = mc_2 t_2, \quad [0,5 \text{ т.}]$$

откъдето следва връзката между топлинните капацитети

$$\frac{c_1}{c_2} > \frac{t_2}{t_1} > 1 \Rightarrow c_1 > c_2, \quad [1 \text{ т.}]$$

т.е. специфичният топлинен капацитет c_1 на първата течност е по-голям от специфичния топлинен капацитет c_2 на втората течност.

При температурата на кипене за изпаряване на първата течност е нужно количество топлина

$$Q'_1 = mr_1 = P(\tau_3 - \tau_2), \quad [0,25 \text{ т.}]$$

а за втората –

$$Q'_2 = mr_2 = P(\tau_3 - \tau_1). \quad [0,25 \text{ т.}]$$

Тъй като имаме

$$\frac{Q'_1}{Q'_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\tau_3 - \tau_2}{\tau_3 - \tau_1} < 1, \Rightarrow r_1 < r_2, \quad [1 \text{ т.}]$$

т.е. специфичната топлина на изпарение r_1 на първата течност е по-малка от специфичната топлина на изпарение r_2 на втората течност.

В третия участък към даден момент τ' имаме

$$Q_1'' = mC_1\Delta t_1 = P(\tau' - \tau_3), \quad Q_2'' = mC_2\Delta t_2 = P(\tau' - \tau_3), \quad [0,5 \text{ т.}]$$

като $\Delta t_1 > \Delta t_2$. [0,5 т.] Тогава получаваме

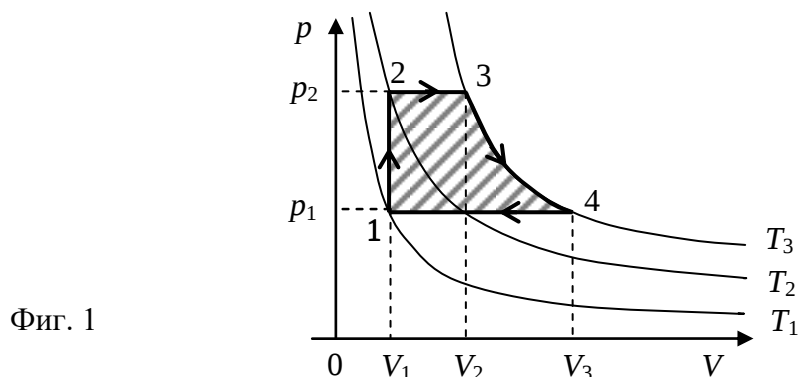
$$\frac{Q_1''}{Q_2''} = \frac{C_1\Delta t_1}{C_2\Delta t_2} = \frac{\tau' - \tau_3}{\tau' - \tau_3} = 1, \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} < 1 \Rightarrow C_1 < C_2, \quad [1 \text{ т.}]$$

т.е. специфичният топлинен капацитет C_1 на парите на първата течност е по-малък от специфичния топлинен капацитет C_2 на парите на втората течност.

Част Б. По определение КПД на топлинен двигател се дава с изрази

$$\eta = \frac{W}{Q}, \quad [0,5 \text{ т.}]$$

където W е работата, извършена от газа, а Q – получената от него топлина. Според



геометричното тълкуване на извършената работа тя се дава с площта на фигурата, оградена от цикличния процес (фиг. 1), т.е.

$$W = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) + BT_3 \ln \frac{V_3}{V_2} - p_1(V_3 - V_2). \quad [1,5 \text{ т.}]$$

За състоянията, които лежат на една изохора имаме

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad \frac{p_1}{T_2} = \frac{p_2}{T_3} \Rightarrow T_2 = \sqrt{T_1 T_3}. \quad [1 \text{ т.}]$$

От друга страна за състоянията, които лежат на изобарата с налягане p_1 , можем да запишем

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2} = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Следователно, като отчетем уравнението на състояние на идеалния газ $pV = BT$, [0,25 т.]
имаме

$$W = \frac{BT_3}{\alpha} \left(\frac{1}{2} \alpha \ln \alpha - (\sqrt{\alpha} - 1) \right), \quad [1 \text{ т.}]$$

където $\alpha = T_3 / T_1 = T_{\max} / T_{\min}$. [0,25 т.] Газът получава топлина в последователността от процеси 1–2–3–4. От първия принцип на термодинамиката имаме

$$Q = U_4 - U_1 + p_2(V_2 - V_1) + BT_3 \ln \frac{V_3}{V_2} = \frac{BT_3}{\alpha} \left(\frac{5}{2} \alpha - \sqrt{\alpha} + \frac{1}{2} \alpha \ln \alpha - \frac{3}{2} \right). \quad [1 \text{ т.}]$$

Следователно за КПД на цикъла получаваме

$$\eta = \frac{(1/2)\alpha \ln \alpha - \sqrt{\alpha} + 1}{(1/2)\alpha \ln \alpha - \sqrt{\alpha} + 1 + (5/2)(\alpha - 1)} = \frac{1}{1 + \frac{5(\alpha - 1)}{\alpha \ln \alpha - 2(\sqrt{\alpha} - 1)}} \approx 0,15. \quad [1 \text{ т.}]$$

Задача 3. Електромагнитен коктейл

А) Силите от страна на двойките диаметрално-противоположни заряди 1–1', 2–2', 3–3' взаимно се улавновесяват. [1 т.]

Следователно на заряда в центъра действа единствено некомпенсираната сила от страна на заряда 4:

$$F = \frac{kq^2}{r^2} = \frac{4kq^2}{3a^2} \quad [1 \text{ т.}]$$

Потенциалът, който създават седемте заряда в центъра е:

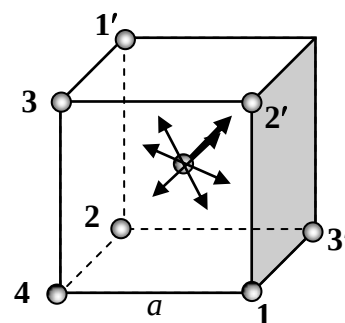
$$\phi_c = \frac{7kq}{r} = \frac{14kq}{a\sqrt{3}} \quad [1 \text{ т.}]$$

Зарядите 1', 2', 3' се намират на разстояния a , зарядите 1, 2, 3 – на разстояния $a\sqrt{2}$, а зарядът 4 – на разстояние $a\sqrt{3}$ от върха на куба. Следователно потенциалът, който седемте заряда създават във върха, е:

$$\phi_v = \frac{3kq}{a} + \frac{3kq}{\sqrt{2}a} + \frac{kq}{\sqrt{3}a} \quad [1 \text{ т.}]$$

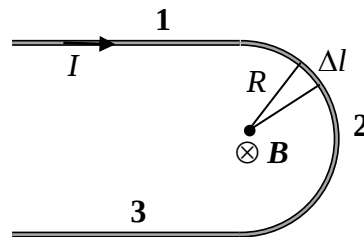
Работата, нужна за преместване на заряда от върха в центъра, е:

$$A = q(\phi_c - \phi_v) = \frac{kq^2(26\sqrt{3} - 9\sqrt{2} - 18)}{6a} \quad [1 \text{ т.}]$$



Б) Всеки от праволинейните участъци 1 и 3 създава магнитна индукция, която е половината от магнитната индукция на безкраен прав проводник:

$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \quad [1 \text{ т}]$$



Разглеждаме малък елемент с дължина Δl от кръговия участък

2. По закона на Био-Савар, той създава магнитна индукция:

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta l}{4\pi R^2} \quad [1 \text{ т}]$$

Общото поле на участъка 2 е сума от полетата, създадени от всички малки елементи:

$$B_2 = \sum \frac{\mu_0 I \Delta l}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4R} \quad [1 \text{ т}]$$

където сме използвали, че $\sum \Delta l = \pi R$ е дължината на полуокръжността.

От правилото на дясната ръка установяваме, че и трите участъка създават магнитна индукция в посока от нас към чертежа. Следователно общата магнитна индукция в т. О също е насочена от нас към чертежа. [1 т]

Съгласно с принципа за суперпозиция, големината на магнитната индукция е:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I (2 + \pi)}{4\pi R} \quad [1 \text{ т}]$$

В) Разглеждаме токов носител с положителен заряд q , който се движи със скорост v заедно с потока вода. На заряда действа магнитна сила:

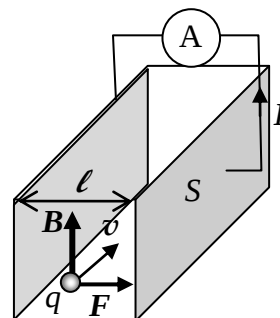
$$F = qvB \quad [1 \text{ т}]$$

насочена надясно. При пренасянето на заряда от лявата до дясната пластина силата извършва работа:

$$A = Fl = qvBl \quad [1 \text{ т}]$$

където l е разстоянието между плочите. Следователно между плочите се индуцира ЕДН:

$$U = \frac{A}{q} = vBl \quad [1 \text{ т}]$$



Съпротивлението на водата между плочите е:

$$R = \frac{\rho l}{S} \quad [1 \text{ т}]$$

Следователно, когато свържем плочите с проводник с нулево съпротивление, във веригата протича ток:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{vBS}{\rho} = 2,5 \text{ A} \quad [1 \text{ т}]$$

Задача 4. Вълшебни огледала

а) Нека с a_1 и b_1 бележим разстоянието до предмета и неговия образ, който се получава от горното огледало, а с a_2 и b_2 бележим разстоянието до източника и образа, който се получава от долното огледало. Образът от отражението в горното огледало е източник за долното. Използвайки формулата за сферично огледало (и конвенцията, че всички разстояния се мерят от върха на огледалото и са положителни, когато са пред огледалото), получаваме следните уравнения: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}$ (1) [0.2 т.], $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f}$ (2), [0.2 т.] $a_1 = x - d$ (3), [0.2 т.] $a_2 = -b_1 + x$ (4), [0.2 т.] $b_2 = x + d$ (5). [0.2 т.] Заместваме a_1 от (3) в (1), a_2 от (4) в (2) и b_2 от (5) в (2). Съответно (1) и (2) могат да се преобразуват до $b_1 = \frac{f(x-d)}{x-d-f}$ (6) и $-b_1 + x = \frac{f(x+d)}{x+d-f}$ (7). Събирайки (6) и (7), получаваме уравнението $x = \frac{2f(x^2-d^2)-2f^2x}{(x-f)^2-d^2}$. То може да се преобразува до следното уравнение от трета степен: $x^3 - 4fx^2 + (3f^2 - d^2)x + 2fd^2 = 0$. (8) [2 т.] При даденото приближение $d \ll x$, можем да го сведем до квадратно уравнение $x^2 - 4fx + 3f^2 = 0$. То има решения $x_1 = f$ и $x_2 = 3f$. [1.5 т.] Ще използваме по-малкото решение $x = f$, т.е. $\frac{x}{f} = 1$. [0.5 т.]

б) Образът е действителен [0.5 т.] и обърнат. В случая „обърнат“ означава обърнат хоризонтално, т.е. завъртян на 180° . В това можем да се убедим като начертаем пътя на лъчите, идващи от източник, намиращ се леко встрани от главната оптична ос. Иначе спрямо вертикалата източникът е „прав“. [0.5 т.]

в) Образът ще е пак дясна ръчичка. Образът ще бъде само транслиран и завъртян спрямо предмета. Въртенето не променя „дясното“ в „ляво“. [1 т.]

г) Отношението D/x може да се намери от свойството на сферичната повърхност. Ако разгледаме триъгълник с върхове центъра на кривината на едно от огледалата, средната точка между центровете на двете огледала и точка от ръба на огледалото, този триъгълник е правоъгълен и има страни $2f$, $\frac{3f}{2}$ и $\frac{D}{2}$. [1 т.] От Питагоровата теорема намираме $4f^2 = \frac{9}{4}f^2 + \frac{1}{4}D^2$, откъдето $\frac{D}{x} = \frac{D}{f} = \sqrt{7}$. [2 т.]

д) Образът на дясната ръчичка, получен от 3 отражения в огледалата (2 от долното и 1 от горното), всъщност също се вижда на снимката (в случая жаба). При първото отражение от долното огледало се получава огледален образ със същата големина (сферичното огледало работи като плоско). Нататък задачата е същата, но за „новия“ източник, намиращ се малко под долното огледало. Следователно, образът ще се намира малко под повърхността на горното огледало [1 т.] и ще е огледален на горния образ, т.е. ръчичката ще бъде лява. [1 т.]

е) След като след 2 отражения от отвора ще излиза успореден сноп светлина, това означава, че междинният образ се намира във фокуса на долното огледало. [0.5 т.] Този образ пък ще е на разстояние y от центъра на горното огледало. [0.2 т.] Лампичката ще е на разстояние $y + f$ от центъра на горното огледало. [0.3 т.] От уравнението за отражение в горното огледало $\frac{1}{y+f} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$. [1 т.] От него се намира $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}f$. Взимаме само положителния корен $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}f$. [1 т.]

Литература: <http://www.optigone.com/>