

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ
5 април 2016 г., Ловеч
Тема за 9. клас, решения и указания

Задача 1. Електрическа схема.

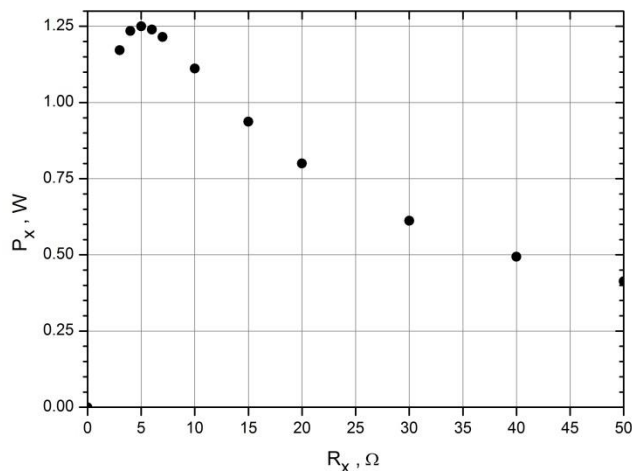
а) За да намерим тока I_x , може да използваме следните зависимости: трите тока I_1 , I_2 и I_x са свързани с равенството $I_1 = I_2 + I_x$ (1), [0.3 т.] напреженията върху резисторите R_2 и R_x са равни: $I_2 R_2 = I_x R_x$ (2), [0.3 т.] сумата от напреженията върху R_1 и R_2 са равни на електродвижещото напрежение на батерията: $E = I_1 R_1 + I_2 R_2$. (3) [0.4 т.] От (2) можем да изразим I_2 чрез I_x , $I_2 = \frac{R_x}{R_2} I_x$. (4) От (3) и (4) можем да изразим I_1 чрез I_x , $I_1 = \frac{E - R_2 I_2}{R_1} = \frac{E}{R_1} - \frac{R_x}{R_1} I_x$. (5) Замествайки (5) и (4) в (1), получаваме $I_x = \frac{E R_2}{R_x (R_1 + R_2) + R_1 R_2}$. [1 т.]

б) Отделящата се електрична мощност P_x върху резистора R_x е $P_x = I_x^2 R_x = \frac{E^2 R_2^2 R_x}{[R_x (R_1 + R_2) + R_1 R_2]^2}$. (6) [0.5 т.]

в) При $E = 10 \text{ V}$ и $R_1 = R_2 = 10 \text{ } \Omega$, (6) става $P_x = \frac{10^2 10^2 R_x}{[R_x 20 + 10 \cdot 10]^2} = \frac{R_x}{\left[\frac{R_x}{5} + 1\right]^2}$. [0.5 т.]

Първоначално задаваме няколко стойности за R_x , за да се ориентираме как изглежда зависимостта $P_x = f(R_x)$. След това продължаваме да даваме стойности по-нагъсто около намерения (последния намерен) максимум. [0.5 т.] Чертаем графика. [2 т.]

R_x, Ω	P_x, W
0	0
10	1,11
20	0,80
30	0,61
40	0,49
50	0,41



R_x, Ω	P_x, W
5	1,25
15	0,94
3	1,17
7	1,22
4	1,24
6	1,24

От графиката се вижда, че стойността на резистора R_x , за която мощността P_x е максимална, е $R_x = 5 \text{ } \Omega$. [0.5 т.] Максималната мощност е $P_x = 1,25 \text{ W}$. [0.5 т.]

г) При $R_1 = R_2 = R$, формула (6) се превръща в $P_x = \frac{E^2 R^2 R_x}{[R_x 2R + R^2]^2} = \frac{E^2 R_x}{[2R_x + R]^2}$. (7) [0.5 т.]

Можем да преобразуваме (7) като квадратно уравнение за R_x с параметър P_x . То ще изглежда така: $4P_x R_x^2 + (4P_x R - E^2)R_x + P_x R^2 = 0$. (8) [0.5 т.] В зависимост от стойността на P_x , (8) може да има 2 решения, едно решение или да няма решение. P_x е максимална, когато (8) има едно решение. Тогава дискриминантата на (8) е нула:

$D = (4P_x R - E^2)^2 - 16P_x^2 R^2 = 0$. [1 т.] След опростяване, намираме $P_x = \frac{E^2}{8R}$. [0.5 т.]

От (8) за R_x се получава $R_x = \frac{R}{2}$. [0.5 т.]

Задача 2. Монета в кубче лед.

а) За да плава, тялото трябва да е в равновесие и силата на тежестта G да е равна на изтласкващата сила $F_{\text{Арх}}$. Когато тялото плава, то е потопено частично. Тогава изтласкващата сила $F_{\text{Арх}}$, която ще му действа, ще е по-малка от максималната изтласкваща сила F_{max} , която ще му действа, ако то се потопи напълно: **[0.5 т.]** $G = F_{\text{Арх}} \leq F_{\text{max}}$, **[0.5 т.]** $(m_M + m_L)g \leq \rho_B(V_M + V_L)g = \rho_B\left(\frac{m_M}{\rho_M} + \frac{m_L}{\rho_L}\right)g$. **[1 т.]** След съкращаване на земното ускорение g и преобразувания се получава $m_L \geq m_M \frac{1 - \frac{\rho_B}{\rho_L}}{\frac{\rho_B}{\rho_L} - 1}$ **[1 т.]**

$$\text{или } m_{\min} = 2,0 \text{ g} \cdot \frac{1 - \frac{1,0}{8,0}}{\frac{1,0}{0,9} - 1} = 15,75 \text{ g} \text{ [1 т.]}$$

б) Нивото на водата в цилиндъра е такова, че все едно сме доляли вода с маса, равна на масата на кубчето (измественият (допълнителен) обем вода V_B има маса, равна на тази на кубчето). **[0.5 т.]** Следователно нивото ще се повдигне на височина $H = \frac{V_B}{S} = \frac{m_M + m_B}{S \rho_B}$ **[0.5 т.]** $= \frac{2\text{g} + 18\text{g}}{10\text{cm}^2 \cdot 1,0 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 2,0 \text{ cm}$. **[1 т.]**

в) Кубчето ще плава, докато масата на леда намалее от 18 g на 15,75 g. **[1 т.]** След това ще потъне на дъното на цилиндъра и там ще продължи да се топи. **[0.5 т.]** Когато се стопи всичият лед, монетата ще остане на дъното. **[0.5 т.]**

г) Нивото на водата ще се промени заради разликата в обемите на изместената от кубчето лед вода V_B и сумата на обемите на монетата и водата, получена от стопения лед, $V_M + V_C$. **[0.5 т.]** $h = \frac{(V_M + V_C) - V_B}{S} = \frac{\frac{m_M}{\rho_M} + \frac{m_B}{\rho_B} - \frac{m_M + m_B}{\rho_B}}{S} = \frac{m_M}{S} \left(\frac{1 - \frac{\rho_M}{\rho_B}}{\rho_M} \right)$ **[0.5 т.]** =

$$\frac{2\text{g}}{10 \text{ cm}^2} \left(\frac{1 - \frac{8,0 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{1,0 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}}{8,0 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \right) = -0,175 \text{ cm} = -1,75 \text{ mm} \text{ (нивото ще падне)} \text{ [1 т.]}$$

Задача 3. Маркуч с несмесващи се течности.

а) В равновесие хидростатичното налягане на нивото на долната част на маркуча, създавано от стълбовете с двата вида течности, е едно и също. **[0.5 т.]** Нека бележим с H_0 височината на стълба хексен в началното състояние, с h_0 - височината на стълба вода в началното състояние, с H_1 - височината на стълба хексен след доливането на допълнителен обем V_X хексен, с h_1 - височината на стълба вода след доливането на допълнителен обем V_X хексен. От условието за равенство на хидростатичното налягане следва, че $\rho_X g H_0 = \rho_B g h_0$. **[0.5 т.]** След съкращаването на земното ускорение g се получава $\rho_X H_0 = \rho_B h_0$. (1) Същото условие е изпълнено и след доливането на допълнителния обем хексен: $\rho_X H_1 = \rho_B h_1$. (2) **[0.5 т.]** Тъй като количеството вода е едно и също, $h_1 - h_0 = l$. (3) **[0.5 т.]** При доливане на допълнителен обем V_X хексен, дължината на течността хексен ще се удължи с V_X/S , следователно $H_1 - H_0 = -l + \frac{V_X}{S}$. (4) **[0.5 т.]** Ако извадим (1) от (2), се получава $\rho_X(H_1 - H_0) = \rho_B(h_1 - h_0)$, откъдето $\frac{H_1 - H_0}{h_1 - h_0} = \frac{\rho_B}{\rho_X}$. (5) Разделяйки (4) на (3), се получава $\frac{H_1 - H_0}{h_1 - h_0} = \frac{-l + \frac{V_X}{S}}{l} = \frac{V_X}{Sl} - 1$. **[0.5 т.]** (6) Приравнявайки десните страни на равенствата (5) и (6) (левите са равни) следва, че $\frac{\rho_B}{\rho_X} = \frac{V_X}{Sl} - 1$, откъдето $l = \frac{V_X}{S} \frac{1}{\frac{\rho_B}{\rho_X} + 1} = \frac{6\text{cm}^3}{0,6\text{cm}^2 \cdot \frac{1,0\text{g/cm}^3}{2/3\text{g/cm}^3} + 1} = 4,0 \text{ cm}$. **[1 т.]**

б) Промяната $H_1 - H_0$ на нивото на хексена може да се намери от (4), замествайки получения резултат за преместването на мехурчето l от (7): $H_1 - H_0 = -\frac{V_X}{S} \frac{1}{\frac{\rho_B}{\rho_X} + 1} + \frac{V_X}{S} =$

$$\frac{V_X}{S} \left(\frac{\rho_B}{\rho_B + \rho_X} \right) = \frac{V_X}{S} \frac{1}{\frac{\rho_X}{\rho_B} + 1} = [1 \text{ т.}] = \frac{6 \text{ cm}^3}{0,6 \text{ cm}^2 \frac{2/3 \text{ g/cm}^3}{1,0 \text{ g/cm}^3} + 1} = 6,0 \text{ cm}. [1 \text{ т.}]$$

в) Новият обем вода V_B , който трябва да се добави към предишната, така че мехурчето да се върне в първоначалното си положение, може да се намери по същия начин, както в подусловие а). Всъщност това е същата задача, но с разменени течности. [1 т.] Следователно и отговорът ще е същият, ако в него се разменят параметрите (плътностите) на двете течности. Правейки това, получаваме от (7): $l = \frac{V_B}{S} \frac{1}{\frac{\rho_X}{\rho_B} + 1}$. (8) [1

т.] Сравняваме десните страни на (7) и (8): $\frac{V_X}{S} \frac{1}{\frac{\rho_B}{\rho_X} + 1} = \frac{V_B}{S} \frac{1}{\frac{\rho_X}{\rho_B} + 1}$, откъдето $V_X \rho_X = V_B \rho_B$,

$$V_B = \frac{\rho_X}{\rho_B} V_X = [0.5 \text{ т.}] = \frac{2/3 \text{ g/cm}^3}{1,0 \text{ g/cm}^3} \cdot 6 \text{ cm}^3 = 4 \text{ cm}^3. [0.5 \text{ т.}]$$