

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА

Разград, 10-12 април 2017 г.

Решения на темата върху учебно съдържание за 10.–12. клас

Задача 1. Механика

а) Тъй като в системата няма триене, в сила е законът за запазване на енергията:

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgH \text{ [0.5 т.]}. \text{ Следователно } H = \frac{v_1^2}{2g} \text{ [0.5 т.]}. \quad \text{[0.5 т.]}$$

б) Отново от закона за запазване на енергията имаме $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgR(1 - \cos \theta)$ [1 т.]

$$\text{Следователно } v = \sqrt{v_1^2 - 2gR(1 - \cos \theta)} \text{ [1 т.]}$$

в) Балансът на силите, които действат на малкото тяло в радиално направление, създава центростремително ускорение: $N - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{R}$ [2 т.]. Така намираме

$$N = \frac{mv^2}{R} + mg \cos \theta = \frac{mv_1^2}{R} - mg(2 - 3 \cos \theta) \text{ [1 т.]}$$

г) От закона за запазване на енергията имаме $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_{2,x}^2}{2} + \frac{mv_{2,y}^2}{2} + mgR + \frac{Mv_{2,x}^2}{2}$ [1 т.], а от

закона за запазване на импулса в хоризонтално направление имаме $mv_1 = (m + M)v_{2,x}$ [1 т.].

Така намираме двете компоненти:

$$v_{2,x} = \frac{m}{m + M} v_1 \text{ [0.5 т.]}$$

$$v_{2,y} = \sqrt{\frac{M}{m + M} v_1^2 - 2gR} \text{ [0.5 т.]}$$

д) Малкото тяло се движи като тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта. Времето на

свободен полет е $t = \frac{2v_{2,y}}{g}$ [1 т.], а отместването е $x = v_{2,x}t = \frac{2v_{2,x}v_{2,y}}{g}$ [1 т.]

е) От закона за запазване на енергията имаме $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}$ [0.5 т.], а от закона за

запазване на импулса имаме $mv_1 = -mv_1' + Mu$ [0.5 т.]. Така получаваме $v_1' = \frac{M - m}{M + m} v_1$ [1 т.]

ж) Работата е равна на промяната на пълната механична енергия на голямото тяло:

$$A = E_M^2 - E_M^1 = \frac{Mu^2}{2} \text{ [1 т.]}. \text{ От преданата подточка имаме, че } u = \frac{2mv_1}{m+M} \text{ [0,5 т.]}. \text{ Така}$$

$$\text{получаваме } A = \frac{2m^2M}{(m+M)^2} v_1^2 \cdot \text{ [0,5 т.]}$$

Задача 2. Задачи – оценки

2.1. По определение налягането $p = F/S$ [0,5 т.]. Силата F , с която капката действа върху земята при удара си, ще оценим чрез закона на Нютон:

$$F = m \frac{|\Delta v|}{\Delta t} \sim \frac{mv}{\Delta t}, \quad \text{[0,5 т.]}$$

където Δt е времето на удара. Като отчетем, че характерният размер на капката е r , имаме $m = \rho V \sim \rho r^3$, $\Delta t \sim r/u$, където u е скоростта на звука, $S \sim r^2$ [1,5 т.], намираме

$$p \sim \rho v c \sim 10^7 \text{ Pa}. \quad \text{[0,5 т.]}$$

Тук е отчетено, че скоростта на капката непосредствено преди удара е $v = \sqrt{2gh} \sim 10 \text{ m/s}$

2.2. Търсената сила се дава с израза $F = (p_0 - p)S$ [0,5 т.], където p_0 е атмосферното налягане, p – налягането на въздуха в чашата след стопяването на леда, S – лицето на отвора на чашата. В началото въздухът в чашата има температура T_0 , налягане p_0 и обем $V - V_0$, където V е обемът на чашата, а V_0 – обемът на леда. След стопяването на леда температурата на въздуха в чашата става T , налягането p , а обемът $V - V_1$. Тук V_1 е обемът на водата, получена от стопяването на леда. Тъй като въздухът може да се разглежда като идеален газ, имаме

$$\frac{p(V - V_1)}{T} = \frac{p_0(V - V_0)}{T_0} \Rightarrow p = \frac{V - V_0}{V - V_1} \times \frac{T}{T_0} \times p_0. \quad \text{[1 т.]}$$

Тогава за силата получаваме израза

$$F = p_0 S \left[1 - \frac{V - V_0}{V - V_1} \times \frac{T}{T_0} \right] = p_0 S \left[\frac{V_0 - V_1}{V - V_1} + \frac{V - V_0}{V - V_1} \times \frac{T_0 - T}{T_0} \right] \cdot \text{[1 т.]}$$

Като отчетем $p_0 = 1.10^5 \text{ Pa}$, $V = 250 \text{ cm}^3$, $V_0 = 110 \text{ cm}^3$, $V_1 = 100 \text{ cm}^3$, $T_0 = 293 \text{ K}$, $T = 273 \text{ K}$, [1 т.] намираме

$$F \approx 30 \text{ N}. \quad \text{[0,5 т.]}$$

2.3. Нека мощността на нагревателя (котлона) е P , а специфичната топлина на парообразуване при кипене е r . Ще въведем още един параметър, който ще означим с η . Той показва каква част от мощността на котлона отива за парообразуване. За единица време кипящата вода получава количество топлина ηP [0,5 т.] и се изпарява маса $\eta P/r$ [0,5 т.]. От друга страна през „носа“ на чайника за единица време преминава същата маса пара с плътност ρ и обем vS , [0,5 т.] където S е площта на отвора. От приравняването на двата израза за масата имаме

$$\frac{\eta P}{r} = \rho v S \Rightarrow v = \frac{\eta P}{r \rho S}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Разглеждайки парата като идеален газ, можем да изразим плътността ѝ от уравнението на състояние $pV = nRT = (m/\mu)RT$ [0,5 т.], където m е масата на парата, а μ – моларната маса. Тогава имаме

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT} \quad [0,5 \text{ т.}]$$

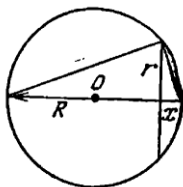
и след заместване за скоростта на струята получаваме израз

$$v = \frac{\eta PRT}{r \mu p S}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

За оценка използваме: $P = 1 \text{ kW}$, $\eta = 0,5$, $T = 373 \text{ K}$, $p = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $S = 2 \text{ cm}^2$ [0,5 т.], при което имаме

$$v \approx 2 \text{ m/s}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

2.4. Нека топката е в контакт със стената чрез кръг с радиус r (фиг. 1). Тогава имаме



фиг. 1. [0,5 т.]

$$\frac{x}{r} = \frac{r}{2R - x} \Rightarrow r^2 = 2Rx \left(1 - \frac{x}{2R} \right) \approx 2Rx, \quad x \ll R. \quad [0,75 \text{ т.}]$$

Силата F , с която топката действа върху стената (или стената действа върху топката), е

$$F = \pi r^2 \Delta p \approx (2\pi R \Delta p)x, \quad [0,5 \text{ т.}]$$

където $\Delta p = p - p_0$ е превишението на налягането p на въздуха в топката над външното (атмосферното) налягане p_0 , което по време на удара може да се приеме за постоянно.

Тази сила е пропорционална на деформацията x на топката и е аналогична на еластична сила с коефициент на еластичност $\kappa = 2\pi R \Delta p$ [0,5 т.]. Съприкосновението на топката продължава половин период от периода на трептене на топката под действие на тази сила, т.е.

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{\kappa}} = \sqrt{\frac{\pi m}{2R \Delta p}}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

За оценка използваме: $m = 0,5 \text{ kg}$, $R = 10 \text{ cm}$, $\Delta p = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ [0,75 т.], при което получаваме

$$t \approx 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ s} \sim 10^{-2} \text{ s}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

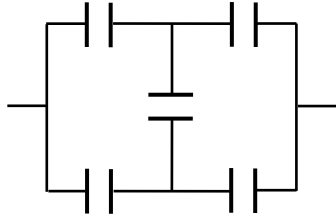
Оценката може да се направи, ако разглеждаме движението на топката при контакта отначало като равнозакъснително, а след това като равноускорително с едно и също по големина ускорение

$$a = \frac{F_{\text{cp}}}{m} = \frac{F_{\text{max}}}{2m} = \frac{\pi r_{\text{max}}^2 \Delta p}{2m} \approx \frac{\pi R A \Delta p}{m}, \quad A \ll R.$$

Топката се притиска към стената (равнозакъснително движение) за време τ и за същото време отскача от стената (равноускорително движение). Тогава имаме

$$A = \frac{a\tau^2}{2} \Rightarrow t = 2\tau = 2\sqrt{\frac{2A}{a}} = 2\sqrt{\frac{2m}{\pi R \Delta p}} \approx 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ s} \sim 10^{-2} \text{ s}.$$

Задача 3. Кондензатори.



Част А Еквивалентната схема на свързване е дадена на фигурата вляво. [1,5 т.] Схемата е симетрична относно средния кондензатор, така че може да го премахнем от веригата. [0,5 т.] Капацитетът между краищата на веригата е $C = C_0$. [1 т.]

Част Б а) Дясната плоча на кондензатора е заредена положително. [0,5 т.] Големината на сумарната електростатична сила, която ѝ действа, се определя от уравнението: $F = q(E_- - E_0)$, [1 т.] където E_- е големината на интензитета, създаван от лявата (отрицателно заредена) плоча на кондензатора. Ако няма външно поле, големината на интензитета вътре в кондензатора е $2E_- = \frac{U}{d} = \frac{q}{\epsilon_0 S} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$, т.е. $E_- = \frac{q}{2\epsilon_0 S}$. [1 т.] Така получаваме квадратно уравнение за търсения заряд q : $q^2 - 2\epsilon_0 S E_0 q - 2\epsilon_0 S F = 0$, [0,5 т.] откъдето $q = \epsilon_0 S E_0 + \sqrt{\epsilon_0^2 S^2 E_0^2 + 2\epsilon_0 S F} = 4,68 \text{ nC}$. [1,5 т.]

б) Във външно електрично поле, насочено надясно, големината на интензитета между плочите на кондензатора е $E = 2E_- - E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 S} - E_0 = \frac{U}{d}$, [1 т.] т.е. $U = d \left(\frac{q}{\epsilon_0 S} - E_0 \right) = d \sqrt{E_0^2 + \frac{2F}{\epsilon_0 S}} = 16,4 \text{ V}$. [1 т.]

в) След откачането на източника на напрежение от кондензатора плочите му си остават със същия заряд q . [0,5 т.] След завъртането интензитетът между клемите е $E' = 2E_- + E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 S} + E_0 = \frac{U'}{d}$. [1 т.] Оттук $U' = d \left(\frac{q}{\epsilon_0 S} + E_0 \right) = d \sqrt{E_0^2 + \frac{2F}{\epsilon_0 S}} + 2dE_0 = 36,4 \text{ V}$. [1 т.]

г) Работата при завъртането на кондензатора е изцяло за преместването на двете противоположно заредени плочи във външното електрично поле (без да се отчита взаимодействието между самите електроди), тъй като електродите на кондензатора остават неподвижни един спрямо друг. [1 т.] Т.е. работата $A = A_L + A_R$, където A_L е работата за преместването на лявата (отрицателно заредена) плоча на мястото на дясната, а A_R е работата за преместването на дясната (положително заредена) плоча на мястото на лявата. [1 т.] Получава се, че $A = 2qdE_0 = 93,5 \text{ nJ}$. [1 т.]

(Алтернативно може да се използва, че $A = W_f - W_i = \frac{cU'^2}{2} - \frac{cU^2}{2} = 2qdE_0 = 93,5 \text{ nJ}$, където W_i е началната енергия на кондензатора във външното електрично поле, а W_f е крайната енергия на кондензатора. [3 т.]

Задача 4. Радиоактивност

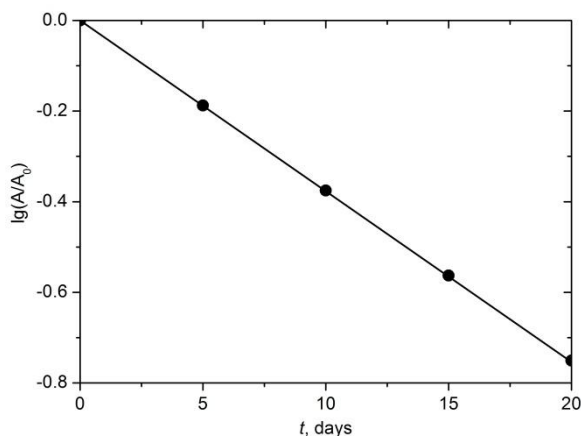
Част А

а) Тъй като активността на една радиоактивна проба е пропорционална на броя радиоактивни атоми, то активността ѝ ще се изменя с времето както броя радиоактивни атоми: $A(t) = A(0) \frac{1}{2^{\frac{t}{T_{1/2}}}}$. [1 т.] Графично най-удобно е тази зависимост да се обработи в

полулогаритмичен мащаб, защото $\lg \frac{A(t)}{A(0)} = -\frac{\lg 2}{T_{1/2}} t$. [0,5 т.] Изчисляваме допълнително данните, които ни трябва, за да построим тази зависимост, и чертаем графиката:

[2 т.]

Момент на измерване t , дни	Активност, брой разпади за минута	$\lg \frac{A(t)}{A(0)}$
0	38846	0
5	25215	-0.1877
10	16368	-0.3753
15	10624	-0.5630
20	6896	-0.7507



Наклонът на правата линия е $k = 0,0375 \text{ дни}^{-1}$. [0,5 т.] Периодът на полуразпад е $T_{1/2} = \frac{\lg 2}{k} = 8,03 \text{ дни}$. [1 т.]

Част Б

б) От закона за радиоактивното разпадане следва, че $N_{\text{U-238}}(t) = N_{\text{U-238}}(0) \frac{1}{2^{\frac{t}{T_{1/2}}}}$. [0,5 т.]

Тъй като броят на оловните атоми е $N_{\text{Pb-206}}(t) = N_{\text{U-238}}(0) - N_{\text{U-238}}(t)$, [0,5 т.] то търсеното отношение е $\frac{N_{\text{Pb-206}}(t)}{N_{\text{U-238}}(t)} = 2^{\frac{t}{T_{1/2}}} - 1$. [1 т.] Аналогично, другото отношение е

$$\frac{N_{\text{Pb-207}}(t)}{N_{\text{U-235}}(t)} = 2^{\frac{t}{T_{1/2}}} - 1. \quad [1 \text{ т.}]$$

в) Тези отношения са изчислени и табулирани в таблицата. [1 т.] След това е построена графиката [2 т.]

$t, 10^9 \text{ год.}$	$\frac{N_{\text{Pb-206}}(t)}{N_{\text{U-238}}(t)}$	$\frac{N_{\text{Pb-207}}(t)}{N_{\text{U-235}}(t)}$
0	0	0
0,5	0,081	0,636
1	0,168	1,677
1,5	0,262	3,379
2	0,364	6,165
2,5	0,474	10,722
3	0,592	18,178

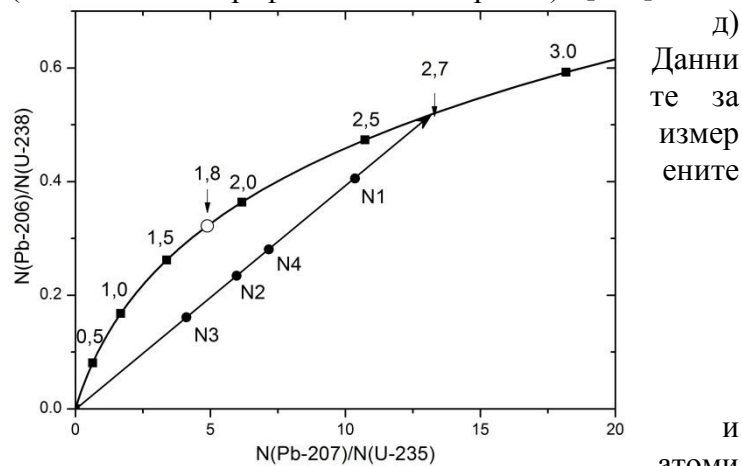
отношения в четирите проби са отбелязани на фигурата с черни кръгчета и техния номер. Тъй като дифузията на оловните изотопи не зависи от вида изотоп, това означава че и двата изотопа ще намаляват по един и същ начин, т.е. отношенията им спрямо урановите

ще намаляват по един и същ начин:

$$\left(\frac{N_{\text{Pb-206}}}{N_{\text{U-238}}} \right)_{\text{измерено}} / \left(\frac{N_{\text{Pb-207}}}{N_{\text{U-235}}} \right)_{\text{измерено}} = \left(\frac{N_{\text{Pb-206}}}{N_{\text{U-238}}} \right)_{\text{без дифузия}} / \left(\frac{N_{\text{Pb-207}}}{N_{\text{U-235}}} \right)_{\text{без дифузия}}. \quad [1 \text{ т.}]$$

В такъв случай точките на фигурата, съответстващи на различните образци, трябва да лежат на права, минаваща през центъра на координатната система. [1 т.] Тази права пресича конкордията в точка, съответстваща на кристал на същата възраст, но без дифузия. Така получваме възрастта на скалната проба – 2,7 млрд. год. [1 т.]

г) Използвайки графиката, възрастта на кристал циркон с измерени отношения $\frac{N_{\text{Pb-206}}}{N_{\text{U-238}}} = 0,322$ и $\frac{N_{\text{Pb-207}}}{N_{\text{U-235}}} = 4,884$ е приблизително 1,8 млрд год. (отбелязано на графиката с бяло кръгче). [1 т.]



д) Данни те за измерените