

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ

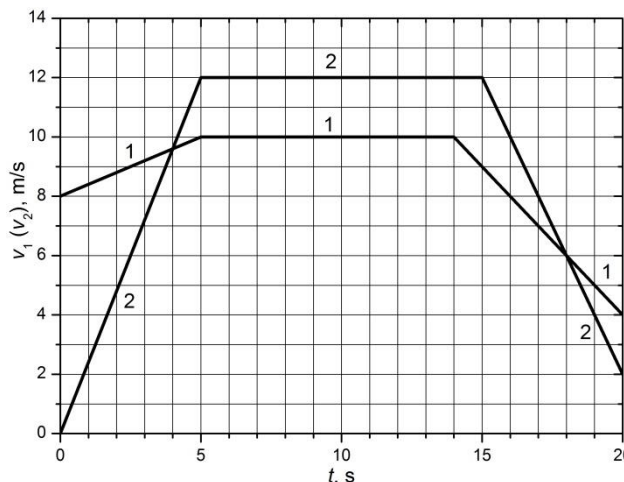
11 април 2017 г., Разград

Решения на задачите от темата за 8. клас

Задача 1. Кинематика

а) До момента време $t = 20$ s тяло 1 е изминало разстояние $x_1 = \frac{8\frac{\text{m}}{\text{s}} + 10\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 5\text{s} + 10\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 9\text{s} + \frac{10\frac{\text{m}}{\text{s}} + 4\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 6\text{s} = 177$ m. [1 т.]

До момента време $t = 20$ s тяло 2 е изминало разстояние $x_2 = \frac{0\frac{\text{m}}{\text{s}} + 12\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 5\text{s} + 12\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10\text{s} + \frac{12\frac{\text{m}}{\text{s}} + 2\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 5\text{s} = 185$ m. [1 т.]
 Следователно тяло 2 ще е по-напред с 8 m. [0,5 т.]



б) Моментът t_{12} е този, в който скоростите на двете тела се изравняват, като преди това тяло 1 се е движilo по-бързо. От графиката се определя, че $t_{12} = 4$ s. [0,5 т.] Разстоянието $l_{12} = x_1(t_{12}) - x_2(t_{12})$. Тъй като скоростта на телата в момента $t_{12} = 4$ s не може да се отчете точно, то координатите на телата в този момент може да се пресметнат от формулата $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ [0,5 т.] като преди това се изчислят изкоренията на двете тела. Ускорението $a_1 = \frac{2}{5} \text{ m/s}^2$, [0,2 т.] а $a_2 = \frac{12}{5} \text{ m/s}^2$. [0,2 т.] Следователно $x_1(t_{12}) = 8\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4\text{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \text{ m/s}^2 \cdot (4\text{s})^2 = 35,2$ m, [0,4 т.] а $x_2(t_{12}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5} \text{ m/s}^2 \cdot (4\text{s})^2 = 19,2$ m. [0,4 т.] Така $l_{12} = 35,2 \text{ m} - 19,2 \text{ m} = 16$ m. [0,3 т.]

в) Моментът t_{21} е този, в който скоростите на двете тела се изравняват, като преди това тяло 2 се е движilo по-бързо. От графиката се определя, че $t_{21} = 18$ s. [0,5 т.] Разстоянието $l_{21} = x_2(t_{21}) - x_1(t_{21})$. Скоростта на телата в момента $t_{21} = 18$ s е $v(18\text{s}) = 6$ m/s. [0,5 т.] Следователно $x_1(t_{21}) = \frac{8\frac{\text{m}}{\text{s}} + 10\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 5\text{s} + 10\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 9\text{s} + \frac{10\frac{\text{m}}{\text{s}} + 6\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 4\text{s} = 167$ m, [0,5 т.] а $x_2(t_{12}) = \frac{0\frac{\text{m}}{\text{s}} + 12\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 5\text{s} + 12\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10\text{s} + \frac{12\frac{\text{m}}{\text{s}} + 6\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 3\text{s} = 177$ m. [0,5 т.] Така $l_{21} = 177 \text{ m} - 167 \text{ m} = 10$ m. [0,5 т.]

г) В момента време t_c , когато разстоянието между тях ще е нула, $x_1(t_c) = x_2(t_c)$. Предполагаме, че $t_c \in (5\text{s}, 15\text{s})$. Тогава $x_1(t_c) = \frac{8\frac{\text{m}}{\text{s}} + 10\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 5\text{s} + 10\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (t_c - 5\text{s})$, [0,5 т.] а $x_1(t_c) = \frac{0\frac{\text{m}}{\text{s}} + 12\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 5\text{s} + 12\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (t_c - 5\text{s})$. [0,5 т.] След приравняването им се намира, че $t_c = 12,5$ s. [0,5 т.] Дотогава всяко от телата е изминало път $l = \frac{8\frac{\text{m}}{\text{s}} + 10\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 5\text{s} + 10\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (12,5\text{s} - 5\text{s}) = 120$ m. [1 т.]

Задача 2. Енергия (две независими части)

Част А. Тела и макари

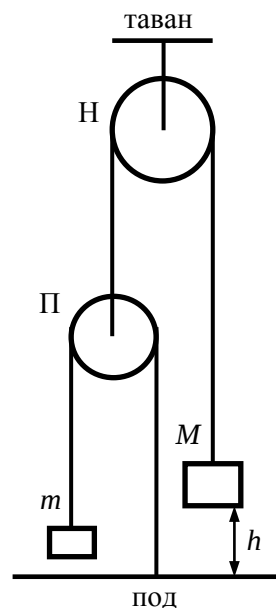
а) Тъй като подвижната макара е в равновесие, когато силата, действаща ѝ от страна на горното въже, е два пъти по-голяма от силата, с която ѝ действа тялото с маса

m , то системата от тела и макари ще е в равновесие, когато $M = 2m$. Ако $\frac{m}{M} < \frac{1}{2}$, тялото с маса M ще тръгне надолу [1 т.]

б) Когато тялото с маса M се удари в пода, ще е изминало разстояние h и ще има скорост v . Заради подвижната макара, тялото с маса m ще се придвижи нагоре на разстояние $2h$ и ще има скорост $2v$. [1 т.] Използвайки закона на запазване на енергията и сравнявайки началното и крайното положение на телата, се получава $Mgh = mg2h + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}m(2v)^2$ [1 т.],

откъдето $v = \sqrt{\frac{2M-4m}{M+4m}gh}$. [1 т.]

в) Замествайки с дадените стойности, скоростта $v = \sqrt{\frac{2.8 \text{ kg} - 4.2 \text{ kg}}{8 \text{ kg} + 4.2 \text{ kg}}} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 0.8 \text{ m} = 2 \text{ m/s}$ [1 т.]



Част Б. Подскачащо топче

г) Времето T от началото на движението на топчето, докато то спре да подскача, може да се пресметне като сума на времената между ударите $T = T_{01} + T_{12} + T_{23} + \dots$. [0,2 т.] Времето за движение между началното положение и първия удар е $T_{01} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. [0,2 т.] Скоростта преди първия удар

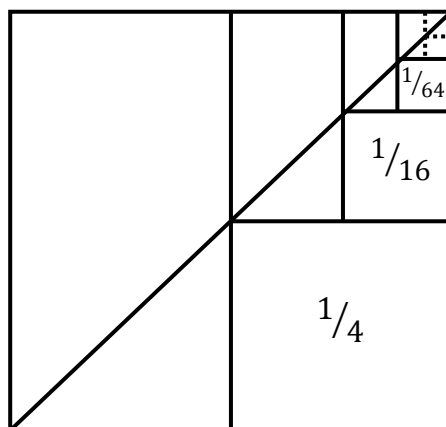
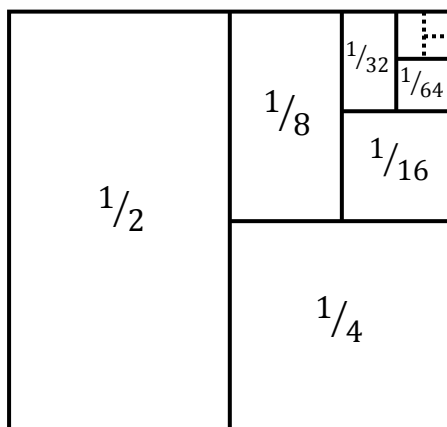
е $v_0 = \sqrt{2gH}$. [0,2 т.] Тъй като при удара топчето губи $3/4$ от кинетичната си енергия, то $\frac{1}{4} \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2}$, [0,2 т.] където v_1 е скоростта след първия удар. Пресмята се, че $v_1 = \frac{v_0}{2}$. [0,2 т.] Времето между първия и втория удар е $T_{12} = \frac{2v_1}{g} = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. [0,2 т.]

Аналогично времето между втория и третия удар е $T_{23} = \frac{2v_2}{g} = \frac{v_1}{g} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2H}{g}}$. [0,2 т.]

Следователно $T = T_{01} + T_{12} + T_{23} + \dots = \sqrt{\frac{2H}{g}} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right)$. [0,5 т.] От приложената фигура се вижда че (сравнявайки сумата на площите на вписаните правоъгълници) ,че $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$. [0,5 т.] Следователно $T = 3 \sqrt{\frac{2H}{g}}$. [0,3 т.]

След заместване, $T = 3 \sqrt{\frac{2.045 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0.9 \text{ s}$. [0,3 т.]

д) Пътят L от началото на движението на топчето, докато то спре да подскача, може да се пресметне като сума на изминатите пътища между ударите $L = L_{01} + L_{12} + L_{23} + \dots$. [0,2 т.] Пътят за движение между началното положение и първия удар е $L_{01} = H$. Пътят за движение между първия и втория удар L_{12} може да се пресметне от условието за загуба на енергия. Тъй като тялото губи $3/4$ от енергията си, то ще отскочи на 4 пъти по-малка височина H_{12} , [0,2 т.] т.е $L_{12} = 2H_{12} = \frac{1}{2}H$. [0,2 т.] Аналогично пътят за движение между втория и третия удар $L_{23} = 2H_{23} = \frac{1}{2}H_{12} = \frac{1}{8}H$. [0,2 т.] Следователно $L = L_{01} + L_{12} + L_{23} + \dots = H + \frac{1}{2}H + \frac{1}{8}H + \frac{1}{32}H + \frac{1}{128}H + \dots = H \left[1 + 2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right) \right]$. [0,2 т.] От приложената фигура се вижда че (сравнявайки сумата на площите на вписаните правоъгълници), че $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{3}$. [0,5 т.] Следователно $L = \frac{5}{3}H$ [0,3 т.] = 0,75 m. [0,2 т.]



Задача 3. Подводница.

а) Когато подводницата плава на повърхността, силата ѝ на тежестта се уравновесява с Архимедовата сила, която ѝ действа: $Mg = \rho(V_0 - V_1)g$. [0,5 т.] Така $V_0 = V_1 + \frac{M}{\rho} = [0,5 \text{ т.}] 800 \text{ m}^3 + \frac{2400000 \text{ kg}}{1000 \text{ kg/m}^3} = 3200 \text{ m}^3$. [0,5 т.] За да бъде в равновесие под водата, новата ѝ сила на тежестта се уравновесява с новата Архимедова сила, която ѝ действа: $(M + \rho V_x)g = \rho V_0 g$, [0,5 т.] откъдето $V_x = V_0 - \frac{M}{\rho} = [0,5 \text{ т.}] 3200 \text{ m}^3 - \frac{2400000 \text{ kg}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 800 \text{ m}^3$. [0,5 т.]

б) Плувайки под ъгъл $\alpha = 30^\circ$ спрямо хоризонталата (повърхността) подводницата ще се движи по хипотенузата на правоъгълен триъгълник с малък катет h . Следователно $t_{\min} = \frac{2h}{v_{\max}} = [0,5 \text{ т.}] \frac{2 \cdot 360 \text{ m}}{15 \text{ m/s}} = 48 \text{ s}$. [0,5 т.]

в) Мощността на двигателя е $P = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot x}{t} = F \cdot v$. [0,5 т.] При равномерно движение тази сила е равна на силата на триене, $P = F_{\text{тр}} \cdot v = \frac{1}{2} C \rho S v^3$. [0,5 т.] Сечението $S = \frac{V_0}{l}$. [0,5 т.] Окончателно $P = \frac{1}{2} C \rho \frac{V_0}{l} v^3 = [0,5 \text{ т.}] = \frac{0,1 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 3200 \text{ m}^3 \cdot (15 \frac{\text{m}}{\text{s}})^3}{2 \cdot 80 \text{ m}} = 6,75 \text{ MW}$. [0,5 т.] Тъй като силата на тежестта се уравновесява от Архимедовата сила, необходимата мощност няма да зависи от посоката на движение (хоризонтална или под ъгъл). [0,5 т.]

г) Когато изплава вертикално с изпразнени от вода резервоари, максималната скорост $v_{\text{верт}}$ на подводницата ще се определя от равенството на силата на тежестта, Архимедовата сила и силата на триене: $Mg + F_{\text{тр}} = \rho V_0 g$, [0,4 т.] откъдето $\frac{1}{2} C_1 \rho S_1 v_{\text{верт}}^2 = \rho V_0 g - Mg$, $v_{\text{верт}} = \sqrt{\frac{2(\rho V_0 - M)g}{C_1 \rho S_1}}$. [0,4 т.] Новото напречно сечение е

$S_1 = l \cdot 2r$, където r е радиусът на цилиндъра: $V_0 = l \cdot S = l \cdot \pi r^2$. Така $r = \sqrt{\frac{V_0}{\pi l}} = \sqrt{\frac{3200 \text{ m}^3}{\pi \cdot 80 \text{ m}}} \approx 3,57 \text{ m}$, [0,4 т.] $S_1 = 80 \text{ m} \cdot 2 \cdot 3,57 \text{ m} \approx 571 \text{ m}^2$, [0,4 т.]

$v_{\text{верт}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 3200 \text{ m}^3 - 2400000 \text{ kg}) \cdot 10 \text{ m/s}^2}{0,5 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 571 \text{ m}^2}} \approx 7,5 \text{ m/s}$. [0,4 т.]

д) Минималното налягане $p_{\min}$ на въздуха е $p_{\min} = \rho g h + p_0 = [0,5 \text{ т.}] 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 360 \text{ m} + 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 37,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ [0,5 т.]